◎UE1020400 斜面上の物体　剛体運動計算補足

UE1020400 で摩擦やローラーが回転する運動を取り入れて運動方程式を解いていきます。

ローラーが斜面を落ちる時

・ｙ軸方向の運動は下記の通り。

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = N - m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$m \cdot g \cdot \cos \alpha = N$$

・x 軸方向の運動で，摩擦がある場合

今，ローラーが下に転がっていく状態を考えます。

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$I \cdot \frac{d\phi^2}{dt^2} = a \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

x はローラーの重心座標で，I はローラーの慣性モーメントを，μ は摩擦係数を表わします。また，a，L はそれぞれローラー底面の半径とローラー円筒長を表わします。

ローラーの密度 ρ が一定とすれば，慣性モーメントは定義より次のように計算できます。

$$I = \int \rho \cdot dr \cdot r \cdot d\phi \cdot dz \cdot r^2$$

$$= \rho \int r^3 \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz$$

$$= \rho \cdot a^4 \cdot 2\pi \cdot L$$

$$= \frac{m}{2} \cdot a^2$$

ここでローラーの質量が密度 ρ を使って次のように書けることを用いました。

$$m = \rho \cdot \pi \cdot a^2 \cdot L$$

今，ローラーは滑らかに回転し，斜面とのすべりが無ければ，重心の移動と回転角度は次式の関係を持ちます。

$$\Delta x = a \cdot \Delta\phi$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = a \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

この状態でエネルギーがどのように表わされるかを見ます。

簡単のため摩擦力を F とおきます。

$$I \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2} = a \cdot F$$

$$\therefore F = \frac{I}{a} \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot g \cdot \sin\alpha - F$$

$$= m \cdot g \cdot \sin\alpha - \frac{I}{a} \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$\therefore m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{I}{a} \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

両辺に$\frac{dx}{dt}$を掛け，更に時間 t で積分します。

$$\frac{dx}{dt} \cdot \left(m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{I}{a} \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2}\right) = \frac{dx}{dt} \cdot (m \cdot g \cdot \sin\alpha)$$

$$\int \left(\frac{dx}{dt} \cdot \left(m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{I}{a} \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\right) \cdot dt = \int (m \cdot g \cdot \sin\alpha) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

ここで

$$\frac{dx}{dt}\cdot\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\cdot(\frac{dx}{dt})$$

$$\frac{d\phi}{dt}\cdot\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{d\phi}{dt}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\cdot(\frac{d\phi}{dt})$$

と，滑りがない条件を考慮すると

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot I\cdot\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=m\cdot g\cdot\sin\alpha\cdot x+C$$

初期条件を$t=0\Rightarrow x=0$，$\frac{dx}{dt}=0$，$\phi=0$ とすると$C=0$ となり，結局

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot I\cdot\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=m\cdot g\cdot\sin\alpha\cdot x$$

$\sin\alpha\cdot x=h$，h は物体の高さである事を考えると，左辺第一項は物体の運動エネルギー，第二項は回転のエネルギーで，これらが右辺の物体の位置エネルギーに等しいというエネルギー保存則を示しています。x>0 でローラーの位置が下がることに注意しましょう。

ローラーのように回転しながら（転がりながら）運動する物体は，重心の運動エネルギー（左辺第一項）だけでなく左辺第二項のように回転のエネルギーを持つことになります。

なめらかに回転する（＝滑りがない）物体は摩擦力による仕事が 0 であることも注意が必要です。

ローラーの回転運動を考慮すると運動方程式がどう変わるか見ると，次のようなります。

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=m\cdot g\cdot\sin\alpha\ -\mu\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha$$

$$I\cdot\frac{d\phi^2}{dt^2}=a\cdot\mu\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha$$

$$I = \frac{m}{2} \cdot a^2$$

$$\therefore m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot g \cdot \sin\alpha - \frac{m \cdot a}{2} \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$= m \cdot g \cdot \sin\alpha - \frac{m}{2} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{3}{2} \cdot m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin\alpha\right) \cdot t^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot g \cdot \sin\alpha\right) \cdot t^2$$

この式から，ローラーが糸を付けず斜面を転がる場合，重心運動の加速度が$\frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin\alpha$である事を示しています。

ローラーの回転運動を考えなかった場合は$g \cdot \sin\alpha$でしたから，回転のエネルギー分だけ減少していることが分かります。

またローラーが滑らないとは，どういう条件のときに実現しているかを見ます。

・滑らない条件$\Delta x = a \cdot \Delta\phi$より

$$\frac{m}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2} = a \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{m}{2} \cdot a \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{m}{2} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 2\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$= m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$3\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$3\mu = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha}{m \cdot g \cdot \cos\alpha}$$

よって最大静止摩擦係数 μ_s が下記条件を満たしているときに，斜面上で滑りがない事が分かります。

$$\therefore \mu_S \geq \frac{1}{3} \cdot \tan \alpha$$

質量 m に依存しない事に注目しましょう。