

空気抵抗を考慮した運動方程式の検討

3B Scientific

29 May 2023

1 空気抵抗とレイノルズ数

空気抵抗は、空気という流体から受ける抗力と考えられます。物体が動くではなく、物体の周りの空気という媒質が流れているという見方です。その抗力が速度の大きさに依存するというのは、生活でも感じられます。

流体力学ではレイノルズ数という物体の形状や大きさ、流体の性質（密度、粘性）から決まるパラメータを用いて、流体から受ける抗力を分類しています。そこから、抗力が速度の大きさの一次に比例する場合と速度の大きさの二次に比例する場合があることが知られています¹⁾。

物体が球の場合のレイノルズ数 Re は次のようになります。

$$Re = \frac{2rv\rho}{\eta}$$

ここで r = 球の半径, ρ = 流体の密度, η = 流体の粘性率, v = 流体の流れの速さ (= 物体の速さ) となります。レイノルズ数の大きさにより、抗力 F_D は次のように表されることが実験で示されています。

$$F_D = \begin{cases} 6\pi r\eta v & Re < 1 \\ 0.22\rho\pi r^2 v^2 & Re \gg 1 \approx 1000 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

(1.1) 式が微粒子などに当てはまる、流体の粘性が支配的な場合であり、この抗力を

1) 詳細を知りたい人は調べてみましょう。

粘性抵抗と言います。(1.2) 式は物体が大きく、流体を押しつけて動かしている抗力で慣性抵抗と言います。

実験で 1~3 の各バネテンションでの初速度を見ているので、それを使いレイノルズ数を見積もります。20°C, 1 atm の空気では、 $\eta = 18.2 \times 10^{-6} \text{ kg/(m s)}$, $\rho = 1.205 \text{ kg/m}^3$ であり、球の質量と半径はそれぞれ $m = 0.007 \text{ kg}$, $r = 12.5 \text{ mm}$ です。

表 1.1: 投射速度 v_0 とレイノルズ数 Re

バネテンション	$v_0[\text{m/s}]$	レイノルズ数 Re
1	3.45	5.71×10^3
2	4.79	7.93×10^3
3	6.72	1.11×10^4

どの初速度でもレイノルズ数は 1 より十分大きく、速度の二次に比例した抗力が働くと考えられます。速度が小さくなれば、それに従ってレイノルズ数も小さくなりますが、本実験で使用する球では速度が約 1 cm/s で、はじめてレイノルズ数が約 1 となります。そのため粘性抵抗は無視し、慣性抵抗のみを考慮します。以下では空気抵抗が速度の二次に比例する空気抵抗が働く場合を運動方程式を使って解析します。

2 空気抵抗が速度の二次に比例する場合

x, y 軸を図 2.1 のように取ります。空気抵抗が速度の二次に比例する（空気の慣性抵抗）場合は次の運動方程式になります。この時の比例定数を κ とします。また、以下の計算では C_i は全て定数とします。

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\kappa\dot{x}^2 & (2.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -mg - \kappa\dot{y}^2 : \text{上昇中} & (2.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -mg + \kappa\dot{y}^2 : \text{下降中} & (2.3) \end{cases}$$

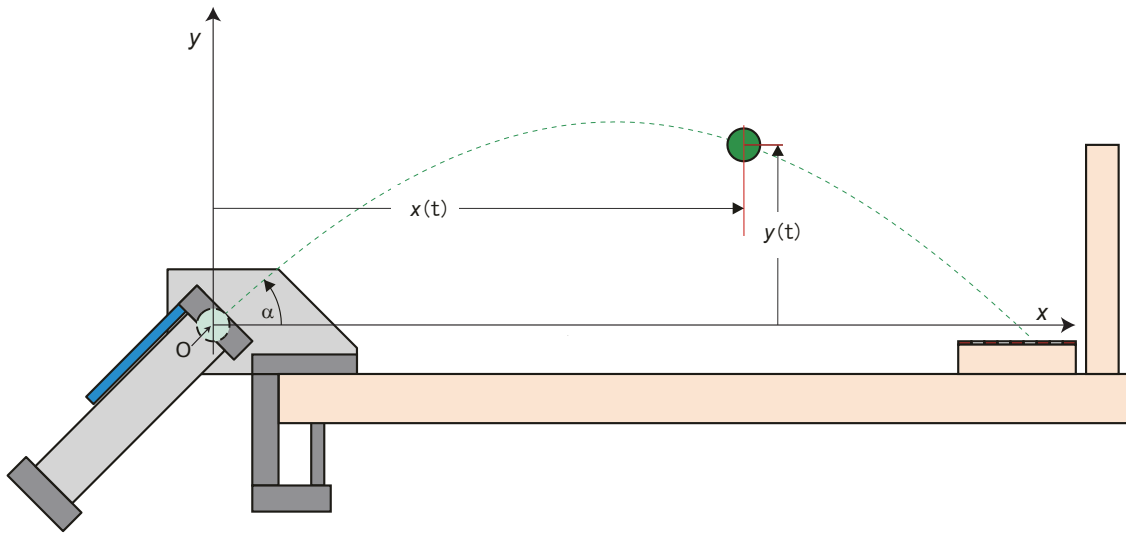


図 2.1: 座標のとり方

2.1 x 方向の解

(2.1) 式より

$$\begin{aligned}
 m\dot{v}_x &= -\kappa v_x^2 \\
 \int \frac{dv}{v_x^2} &= -\frac{\kappa}{m}t + C_1 \\
 v_x(t) &= \left(\frac{\kappa}{m}t + \frac{1}{v_{0x}} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

初期条件として $v_x(t=0) = v_{0x}$ としています。これから x について解けば、

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \left(\frac{\kappa}{m}t + \frac{1}{v_{0x}} \right)^{-1} \\
 &= \frac{m}{\kappa} \left(t + \frac{m}{\kappa v_{0x}} \right)^{-1} \\
 x(t) &= \frac{m}{\kappa} \ln \left| t + \frac{m}{\kappa v_{0x}} \right| + C_2 \\
 &= \frac{m}{\kappa} \ln \left(\frac{m}{\kappa} \left(\frac{\kappa}{m}t + \frac{1}{v_{0x}} \right) \right) + C_2 \\
 &= \frac{m}{\kappa} \left(\ln \frac{m}{\kappa} + \ln \left(\frac{\kappa}{m}t + \frac{1}{v_{0x}} \right) \right) + C_2
 \end{aligned}$$

です。ここで絶対値の中身は正なので絶対値を外しています。右辺の定数項をまとめ、改めて C_2 と書けば

$$x(t) = \frac{m}{\kappa} \ln \left(\frac{\kappa}{m} t + \frac{1}{v_{0x}} \right) + C_2$$

$t = 0 \Rightarrow x = 0$ なので,

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{m}{\kappa} \ln v_{0x} \\ \therefore x(t) &= \frac{m}{\kappa} \ln \left(\frac{\kappa v_{0x}}{m} t + 1 \right) \end{aligned}$$

と x 方向の運動方程式が解けました。

2.2 y 方向の解

2.2.1 上昇中の場合

空気抵抗は運動の向きと反対に働くため、 y 方向では球が上昇中と下降中とで抗力の符号が変わります。その為、まず上昇中 (2.2) 式から考えます。

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -mg - \kappa\dot{y}^2 \\ \therefore \ddot{y} &= -\frac{\kappa}{m} \left(\dot{y}^2 + \frac{mg}{\kappa} \right) \\ \text{これは, } a &= \sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \text{ として} \\ \ddot{y} &= -\frac{\kappa}{m} (\dot{y}^2 + a^2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$\dot{y} = v_y$ なので、次のように変数を変換します。

$$v_y = a \tan \theta$$

上昇中を扱うので v_{0y} を y 方向の初速度とすれば、 $0 \leq v_y \leq v_{0y}$ なので、 $0 \leq \theta < \pi/2$ となっています。よって (2.4) 式は、次のように計算できます。

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{\kappa}{m} (\dot{y}^2 + a^2) \\ \int \frac{dv_y}{(v_y^2 + a^2)} &= -\frac{\kappa}{m} t + C_3 \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで,

$$v_y^2 + a^2 = a^2(\tan^2 \theta + 1) = \frac{a^2}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{dv_y}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta}$$

を考慮すれば, (2.5) 式は次のようになります。

$$\int \frac{dv_y}{(v_y^2 + a^2)} = \frac{\theta}{a} + C_4 = -\frac{\kappa}{m}t + C_3$$

$$\theta = -\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t + C_5$$

$$\therefore v_y = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \tan \left(-\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t + C_5 \right)$$

最高点に達する時間を t_h とすれば, $v_y(t_h) = 0$ なので $\theta = 0$

$$C_5 = \sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t_h$$

$$v_y = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \tan \left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}(t_h - t) \right)$$

また, $t = 0 \Rightarrow v_y = v_{0y}$ なので $\tan \theta_A = A$ の逆三角関数 $\theta_A = \tan^{-1} A$ を使い

$$v_{0y} = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \tan \left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t_h \right)$$

$$\therefore t_h = \sqrt{\frac{m}{\kappa g}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{mg}}v_{0y} \right) \quad (2.6)$$

となります。。

$v_y = \dot{y}$ なので煩雑さを避けるため, $b = \sqrt{\kappa g/m}$ として $y(t)$ は次のようになります。(a は前に定義したように, $a = \sqrt{mg/\kappa}$)

$$\dot{y} = a \tan (b(t_h - t))$$

$$y(t) = \frac{a}{b} \ln |\cos (b(t_h - t))| + C_6$$

考えている時間範囲では $\cos \theta \geq 0$ なので、絶対値を外しています。 a, b を戻すと、

$$y(t) = \frac{m}{\kappa} \ln \left(\cos \left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} (t_h - t) \right) \right) + C_6$$

$t = t_h \Rightarrow y(t) = y_{max}$ から、

$$y(t = t_h) = y_{max} = C_6$$

$$\therefore y(t) = \frac{m}{\kappa} \ln \left(\cos \left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} (t_h - t) \right) \right) + y_{max}$$

また、 $t = 0 \Rightarrow y(t) = 0$ より、 y_{max} を v_{0y} で表すことを考えます。

$$\begin{aligned} y(t = 0) &= \frac{m}{\kappa} \ln \left(\cos \left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} t_h \right) \right) + y_{max} = 0 \\ y_{max} &= -\frac{m}{\kappa} \ln \left(\cos \left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} t_h \right) \right) \\ &= -\frac{m}{\kappa} \ln \left(\cos \left(\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{mg}} v_{0y} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

(2.6) 式より $\tan^{-1} A$ は $\tan \theta_A = A$ となる角度 θ_A を表しているのので、 $\cos(\tan^{-1} A)$ を A で表します。

$$\begin{aligned} \tan \theta_A = A &= \frac{\sin \theta_A}{\cos \theta_A} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta_A} - 1} \\ 1 + A^2 &= \frac{1}{\cos^2 \theta_A} \\ \therefore \cos \theta_A &= \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \end{aligned}$$

(2.7) 式では $\cos \theta_A \geq 0$ なので、根号は負を取りません。よって、

$$\cos \left(\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{mg}} v_{0y} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\kappa}{mg} v_{0y}^2}}$$

であり、(2.7) 式に入れれば

$$y_{max} = \frac{m}{2\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa}{mg} v_{0y}^2 \right)$$

と最高到達点 y_{max} を v_{0y} で表わせました。

空気抵抗を考えない場合の最高点が $y(t=0)=0$ とすれば,

$$y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

であったことと比べると, v_{0y}^2 に複雑な形で依存し, かつ, 空気抵抗の係数はもちろん, 質量にも依存することが分かります。

2.2.2 下降中の場合

球が最高点から落下を始めると (2.3) 式が運動方程式となります。以下では t という時間は $t = t - t_h$ と, 時間 t を最高点からの時間として計算を実行しています。

$$m\ddot{y} = -mg + \kappa\dot{y}^2$$

x 方向と同様に速度の微分方程式と読み直して,

$$\begin{aligned} \dot{v}_y &= -g + \frac{\kappa}{m} v_y^2 \\ &= \frac{\kappa}{m} \left(v_y + \sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \right) \left(v_y - \sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \right) \\ \therefore \ln \left| \frac{v_y - \sqrt{\frac{mg}{\kappa}}}{v_y + \sqrt{\frac{mg}{\kappa}}} \right| &= 2\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \frac{\kappa}{m} t + C_7 \\ &= 2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} t + C_7 \end{aligned}$$

下降中の最大速度となる終端速度を考えると, $\dot{v}_y = 0$ より, $v_{y\text{終端}} = -\sqrt{mg/\kappa}$ なので

$$-\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} < v_y \leq 0$$

よって, 絶対値の中身が負となります。

$$v_y = -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \frac{C_8 \exp\left(2\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} t\right) - 1}{1 + C_8 \exp\left(2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} t\right)}$$

今, $t = 0 \Rightarrow v_y = 0$ なので, $C_8 = 1$ 。双曲線関数を使い形を整え, $t = t - t_h$ と置き換えれば,

$$v_y = -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}(t - t_h)\right) \quad (2.8)$$

となります。

$y(t)$ は (2.8) 式を積分し

$$\begin{aligned} y(t) &= -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}} \ln \left| \exp\left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t - t_h\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}(t - t_h)\right) \right| + C_9 \\ &= -\frac{m}{\kappa} \ln \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}(t - t_h)\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}(t - t_h)\right) \right) + C_9 \end{aligned}$$

です (絶対値の中身は正)。 $t = t_h \Rightarrow y(t) = y_{max}$ であるから,

$$\begin{aligned} y_{max} &= -\frac{m}{\kappa} \ln 2 + C_9 \\ C_9 &= y_{max} + \frac{m}{\kappa} \ln 2 \\ &= \frac{m}{2\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa}{mg} v_{0y}^2 \right) + \frac{m}{\kappa} \ln 2 \\ \therefore y(t) &= -\frac{m}{\kappa} \ln \left(\frac{\exp\left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}(t - t_h)\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}(t - t_h)\right)}{2} \right) + \frac{m}{2\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa}{mg} v_{0y}^2 \right) \\ &= -\frac{m}{\kappa} \ln \left(\cosh \left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}(t - t_h) \right) \right) + \frac{m}{2\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa}{mg} v_{0y}^2 \right) \end{aligned}$$

2.3 まとめ

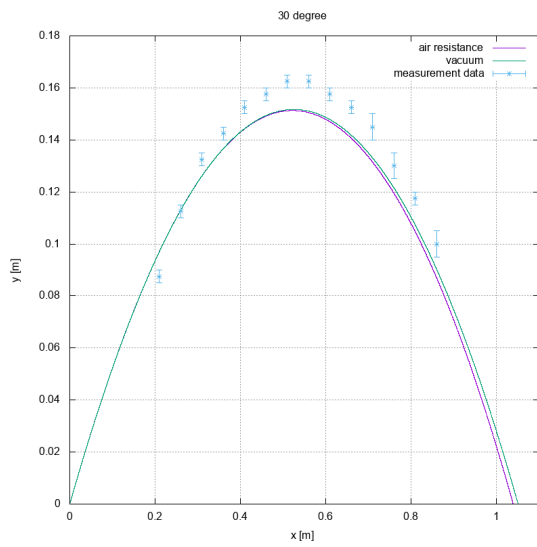
速度の二次に比例する空気抵抗が働く場合は、次のようになります。

$$\left\{ \begin{array}{ll} x \text{ 方向:} & \begin{aligned} x(t) &= \frac{m}{\kappa} \ln \left(\frac{\kappa v_{0x}}{m} t + 1 \right) \\ v_x(t) &= \left(\frac{\kappa}{m} t + \frac{1}{v_{0x}} \right)^{-1} \end{aligned} \\ y \text{ 方向, 上昇中:} & \begin{aligned} y(t) &= \frac{m}{\kappa} \ln \left(\cos \left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} (t_h - t) \right) \right) + \frac{m}{2\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa}{mg} v_{0y}^2 \right) \\ v_y(t) &= \sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \tan \left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} (t_h - t) \right) \end{aligned} \\ y \text{ 方向, 下降中:} & \begin{aligned} y(t) &= -\frac{m}{\kappa} \ln \left(\cosh \left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} (t - t_h) \right) \right) + \frac{m}{2\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa}{mg} v_{0y}^2 \right) \\ v_y(t) &= -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \tanh \left(\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} (t - t_h) \right) \end{aligned} \\ t_h \text{ と } y_{\max}: & \begin{aligned} t_h &= \sqrt{\frac{m}{\kappa g}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{mg}} v_{0y} \right) \\ y_{\max} &= \frac{m}{2\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa}{mg} v_{0y}^2 \right) \end{aligned} \end{array} \right.$$

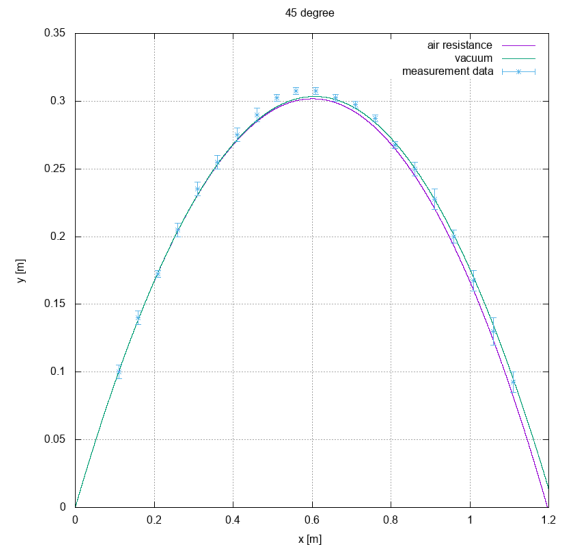
この空気抵抗を考慮した式と測定データのグラフを以下に示します。軌道計算では、初速度 $v_0 = 3.45 \text{ m/s}$ とし、それ以外のパラメータは 2 ページの値を使っています。

30° のデータ以外は空気抵抗を考慮した計算軌道がデータの再現度が高くなっています。 30° については図 2.3a のように軌道計算で射出角度を 31° に設定すると良く一致します。測定時に角度が少し狂っていた可能性があります。

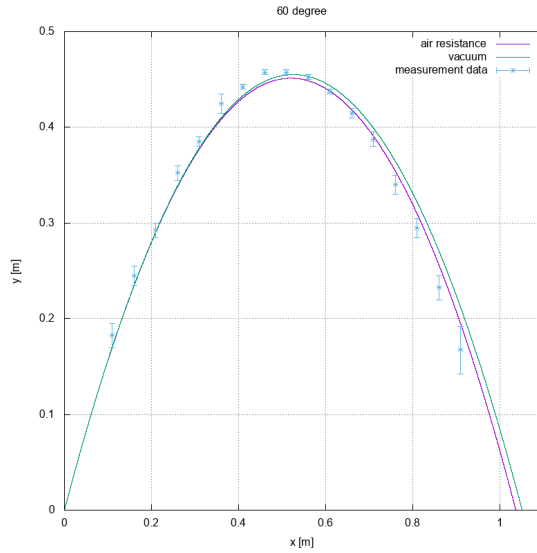
同様に $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ のデータそれぞれに、軌道計算の射出角度を変更し重ねたものが図 2.3 です。それぞれ $45^\circ \rightarrow 45.5^\circ, 60^\circ \rightarrow 61^\circ, 75^\circ \rightarrow 75.5^\circ$ としています。ただ、これが原因かは特定できません。



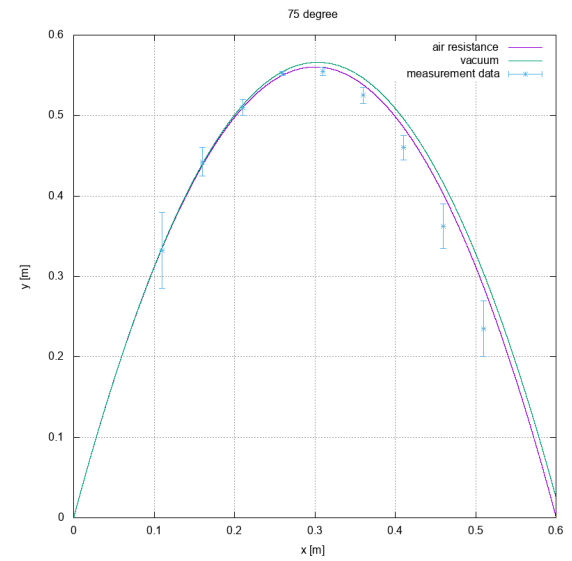
(a) 30°での射出データ



(b) 45°での射出データ



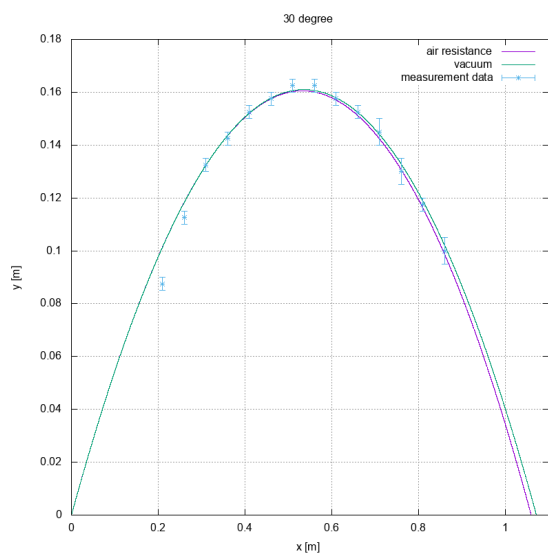
(c) 60°での射出データ



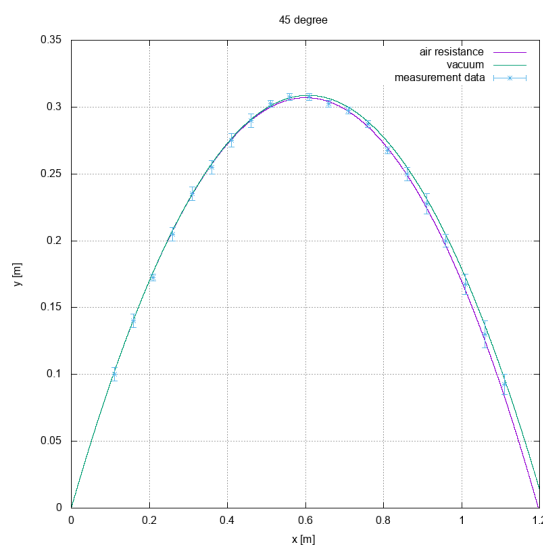
(d) 75°での射出データ

図 2.2: 測定データと計算軌道：紫-空気抵抗考慮，緑-空気抵抗考慮せず

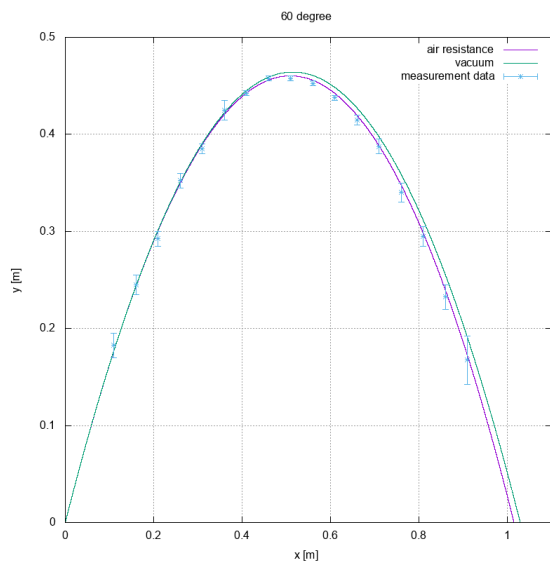
また、いずれの図でも射出角度が大きくなると、到達距離は計算したものよりも短くなる傾向です。計算が実験とあっていない可能性があります。こうしたことを防ぐために、実験中はデータを記録すると同時にグラフ化して、理論値や予想と食い違ってないかを常に確認することが大切です。



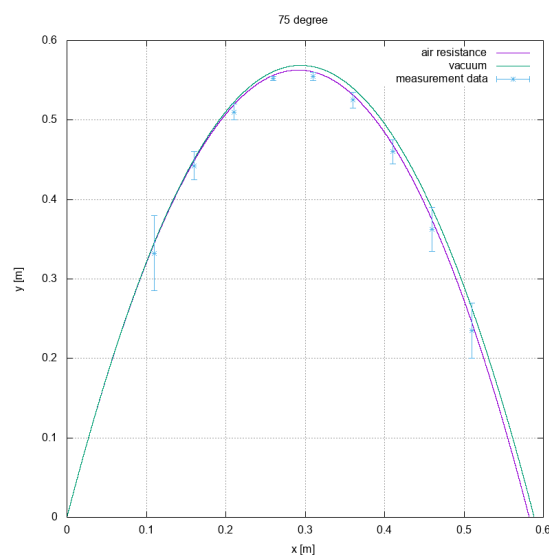
(a) 30° の射出データと射出角度 31° の計算軌道



(b) 45° の射出データと射出角度 45.5° の計算軌道



(c) 60° の射出データと射出角度 61° の計算軌道



(d) 75° の射出データと射出角度 75.5° の計算軌道

図 2.3: 測定データと補正案：紫-空気抵抗考慮，緑-空気抵抗考慮せず

※なお、抗力が速度に依存する流体中の運動は、UE1080350 落球式粘度計の原理と同じです。

2.4 参考：空気抵抗が速度の一次に比例する場合（粘性抵抗）

空気抵抗は速度（速度の一次）に比例するのみとし，比例係数を $\kappa_2 \equiv 6\pi\eta r = \text{const.}$ とします。よって運動方程式は次のようになります。

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\kappa_2\dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg - \kappa_2\dot{y} \end{cases} \quad (2.9)$$

x 成分から計算すると次のとおりです。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \therefore m\dot{v}_x &= -\kappa_2 v_x \\ v_x(t) &= A \exp\left(-\frac{\kappa_2}{m}t\right) \\ x(t) &= -\frac{m}{\kappa_2} A \exp\left(-\frac{\kappa_2}{m}t\right) + B \end{aligned}$$

ここで A , B は定数であり，それを決める初期条件として次を使います。

$$\begin{aligned} v_x(t=0) &= v_{0x}, x(t=0) = 0 \\ \therefore A &= v_{0x}, B = \frac{m}{\kappa_2} v_{0x} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \exp\left(-\frac{\kappa_2}{m}t\right) \\ x(t) = \frac{m}{\kappa_2} v_{0x} \left(1 - \exp\left(-\frac{\kappa_2}{m}t\right)\right) \end{cases}$$

y 方向も同様に解けます。(2.9) 式で変数変換して， $V_y \equiv \dot{y} + \frac{mg}{\kappa_2}$ とすれば，

$$\begin{aligned} m\dot{V}_y &= -\kappa_2 V_y \\ \dot{V}_y &= -\frac{\kappa_2}{m} V_y \\ \ln |V_y| &= -\frac{\kappa_2}{m}t + C \\ v_y(t) &= C' \exp\left(-\frac{\kappa_2}{m}t\right) - \frac{m}{\kappa_2}g \\ y(t) &= -\frac{m}{\kappa_2}C' \exp\left(-\frac{\kappa_2}{m}t\right) - \frac{m}{\kappa_2}gt \end{aligned}$$

2.4 参考：空気抵抗が速度の一次に比例する場合（粘性抵抗）

ここで C, C' は定数です。初期条件を $v_y(t=0) = v_{0y}, y(t=0) = 0$ とすれば

$$\begin{cases} v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{m}{\kappa_2} g \right) \exp\left(-\frac{\kappa_2}{m} t\right) - \frac{m}{\kappa_2} g \\ y(t) = \frac{m}{\kappa_2} \left(v_{0y} + \frac{m}{\kappa_2} g \right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\kappa_2}{m} t\right) \right) - \frac{mg}{\kappa_2} t \end{cases}$$

$\kappa_2 = 6\pi r\eta$ にセクション 1 に記載したパラメータを当てはめると $\kappa_2/m \approx 6.13 \times 10^{-3}$ と小さく κ_2/m の二次以上を落とすと、次のように近似できます。

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t - \frac{v_{0x}\kappa_2}{2m}t^2 \\ y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{v_{0y}\kappa_2}{2m}t^2 \end{cases}$$

結果は、空気抵抗を考えない斜方投射の式に、それぞれ時間 t^2 が掛かった空気抵抗により距離が短くなる効果が加わっています。