

# UE1040500 ジャイロスコープの歳差と章動の計算

3B Scientific

22 March 2019

## 1 目的

ジャイロスコープやコマなどを剛体と考え、運動方程式の解析を通じて歳差と章動を理解すること。

## 2 計算

剛体の回転運動を扱う際には、剛体に固定された座標系（回転する座標系）をとり、動く座標系が慣性系（観測者の系）に対しどのような運動となるかを見るのが扱いやすくなります。これを導入するために幾つかの段階を経ます。

- 慣性系から見た剛体の回転
- 剛体に固定された座標系
- オイラーの式
- オイラー角
- 歳差運動
- 章動運動

### 2.1 慣性系から見た剛体の回転

#### 2.1.1 回転する剛体の角速度ベクトル

ここでは慣性系から見た剛体の一点  $\mathbf{r}_i$  が時間  $dt$  でどのように変位するか考えます。この時、回転中心は重心で、固定点は異なっているとします。重心の運動は質点の運動と同様に扱えるので、先に回転運動部分を取り出して考えます。

時間  $dt$  で  $d\theta$  回転するならば、回転軸の方向の単位ベクトルを  $\mathbf{e}_{\text{回転}}$  と表わせば、

$$\mathbf{r}'_i \Rightarrow \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G \rightarrow \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G + d\theta \mathbf{e}_{\text{回転}} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G + d\theta \mathbf{e}_{\text{回転}} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) &= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_{\text{回転}} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) dt \\ &= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G + \boldsymbol{\omega}_{\text{回転}} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) dt \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\boldsymbol{\omega}_{\text{回転}} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_{\text{回転}} = \dot{\theta} \mathbf{e}_{\text{回転}}$  とし、角速度ベクトルといいます。また、 $\mathbf{e}_i$  の方向は回転の右ねじの進む方向と規定します。角速度ベクトルという量を持ち込んだのは、角速度にベクトル和が使えることで計算が機械的に進められることが理由です。

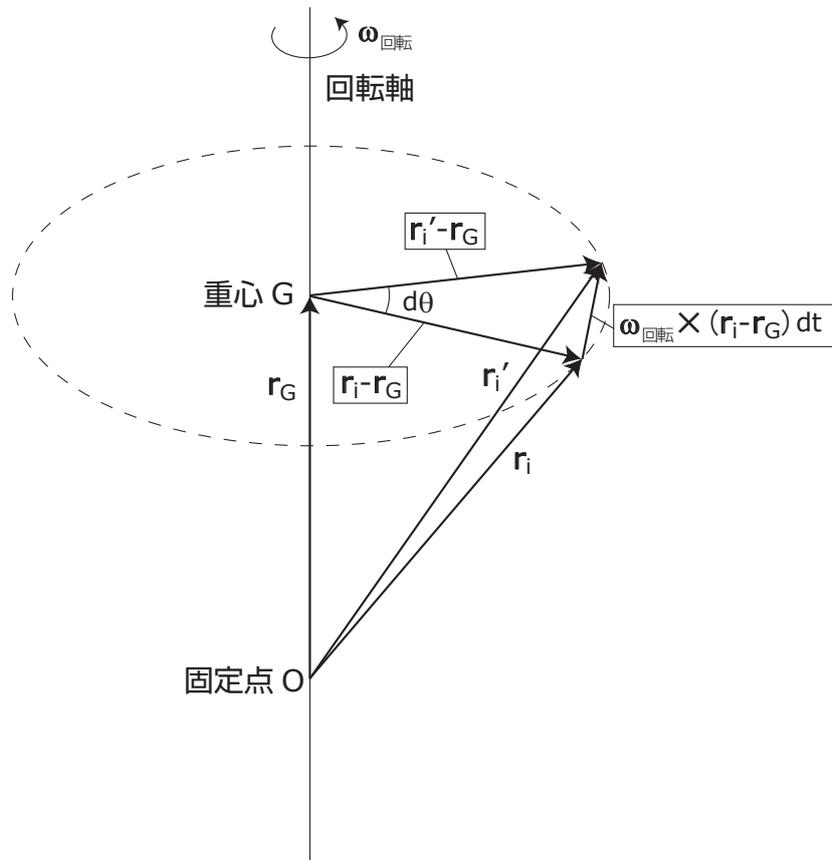


図 1: 位置ベクトルの微小回転

物体を剛体として扱っているため各体積素の角速度は等しく回転軸も等しいので、角速度ベクトル  $\omega_{\text{回転}}$  には添え字  $i$  は付きません。

これから  $\mathbf{r}_i$  の回転速度は、次のようになります。

$$d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) = \omega_{\text{回転}} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) dt \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_{i\text{回転}} = \frac{d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)}{dt} = \omega_{\text{回転}} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \quad (4)$$

回転している剛体の角運動量  $\mathbf{L}$  に関する情報を見ます。剛体の運動量を  $\mathbf{P}$  とすると

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) & (5) \\
&= \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \\
&= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_G + \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \right\} \\
&= m \frac{d\mathbf{r}_G}{dt} + \left\{ \sum_i m_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \right\} \\
&= \mathbf{P}_G + \left\{ \sum_i m_i \boldsymbol{\omega}_{\text{回転}} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \right\} & (6)
\end{aligned}$$

右辺第一項が重心の運動量であり、第二項は重心まわりの運動量ですが、重心の定義から第二項は  $\mathbf{0}$  となる  
 ことが、次のように分かります。

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_G &= \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m} \\
\therefore \mathbf{P}_G &= m \frac{d\mathbf{r}_G}{dt} \\
&= m \frac{d \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m}}{dt} \\
&= \frac{d \sum m_i \mathbf{r}_i}{dt} \\
&= \mathbf{P}
\end{aligned}$$

$$\text{これから, } \sum_i \{m_i \boldsymbol{\omega}_{\text{回転}} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)\} = \mathbf{0} \quad (7)$$

しかし剛体に力が働いていなくとも、剛体の運動は重心の等速直線運動 + 重心周りの回転が可能であり、重心周りの角運動量は  $\mathbf{0}$  ではありません。それを以下に見ていきます。

剛体の角運動量は各部分の角運動量の和であり、この剛体の角運動量  $\mathbf{L}$  は定義から次のようになります。ここで  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G$ 、また、 $\boldsymbol{\omega}_{\text{回転}}$  は  $\boldsymbol{\omega}$  と書くことにします。 $\sum_i m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$  ですが、 $\sum_i \mathbf{r}'_i \times (m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)$  が  $\mathbf{0}$  とは言えないことに注意しましょう。

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \left( m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) \quad (8)$$

$$= \sum_i (\mathbf{r}_i \times (\mathbf{P}_G + m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i))$$

$$= \sum_i ((\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) \times (\mathbf{P}_G + m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i))$$

$$= \sum_i (\mathbf{r}_G \times \mathbf{P}_G + \mathbf{r}_G \times (m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) + \mathbf{r}'_i \times \mathbf{P}_G + \mathbf{r}'_i \times (m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)) \quad (9)$$

第二項は (7) 式から 0, 第三項は  $\sum_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$  から 0 になり,

$$= \mathbf{L}_G + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \quad (10)$$

$$= \mathbf{L}_G + \mathbf{L}' \quad (11)$$

このように剛体の角運動量は, 重心の角運動量  $\mathbf{L}_G$  と重心周りの角運動量  $\mathbf{L}'$  とに分けて表すことができます。

### 2.1.2 角運動量の保存

今は外力が無いとします。すると, 剛体の角運動量  $\mathbf{L}$  は保存することが次のように分かります。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_G + \mathbf{L}_{\text{回転}}) \quad (12)$$

$\mathbf{L}_G$  の時間微分は,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G = m \dot{\mathbf{r}}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G + m (\mathbf{r}_G \times \ddot{\mathbf{r}}_G)$$

外力がないため  $\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{0}$  なので,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G = \mathbf{0} \quad (13)$$

$\mathbf{L}'$  の時間微分は,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}' = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i = \mathbf{0} \quad (14)$$

$$\because \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{r}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$$

ここで, 外力がないので角速度ベクトルが変わらないことと, ベクトル積の恒等式を使いました。

## 2.2 剛体に固定された座標系

### 2.2.1 慣性テンソルと慣性乗積

$t = 0$  で一致している慣性系  $(x, y, z)$  と回転する剛体に固定された座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  を取ります。ここまで考えてきた慣性系から見た角運動量を  $(\xi, \eta, \zeta)$  で記述することを考えます。

$(\xi, \eta, \zeta)$  の基底をそれぞれ  $(\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)$  とします。よって  $\mathbf{r}'_i$  は物体に固定された座標系では次のように表せることとなります。

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G = \xi_i \mathbf{e}_\xi + \eta_i \mathbf{e}_\eta + \zeta_i \mathbf{e}_\zeta \quad (15)$$

この  $(\xi, \eta, \zeta)$  で表わした角運動量がどのような成分になるのか, 具体的に見てみます。 $(\xi, \eta, \zeta)$  は剛体に固定されているので時間変化しませんが, 基底  $(\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)$  が慣性系に対して変化します。

最初に  $\xi$  成分を見ます。なお座標系を変えることで角運動量の表式（関数形）が変わりますが、角運動量が変わるのではないので同じ  $\mathbf{L}'$  で表します。

$$L'_\xi = \sum_i m_i \{ \eta_i (\zeta_i \omega_\xi - \xi_i \omega_\zeta) - \eta_i (\xi_i \omega_\eta - \eta_i \omega_\xi) \} \quad (16)$$

$$= \sum_i m_i \left\{ (\eta_i^2 + \zeta_i^2) \omega_\xi - \xi_i \eta_i \omega_\eta - \xi_i \zeta_i \omega_\zeta \right\} \quad (17)$$

同様に  $\eta, \zeta$  成分も計算でき、次のようになります。

$$L'_\eta = \sum_i m_i \left\{ (\xi_i^2 + \zeta_i^2) \omega_\eta - \xi_i \eta_i \omega_\xi - \eta_i \zeta_i \omega_\zeta \right\} \quad (18)$$

$$L'_\zeta = \sum_i m_i \left\{ (\xi_i^2 + \eta_i^2) \omega_\zeta - \xi_i \zeta_i \omega_\xi - \eta_i \zeta_i \omega_\eta \right\} \quad (19)$$

これら連立式は慣性テンソルという量を導入することで、見やすく扱いやすくなります。

$$\begin{pmatrix} L'_\xi \\ L'_\eta \\ L'_\zeta \end{pmatrix} = \sum_i m_i \begin{pmatrix} \eta_i^2 + \zeta_i^2 & -\xi_i \eta_i & -\xi_i \zeta_i \\ -\xi_i \eta_i & \xi_i^2 + \zeta_i^2 & -\eta_i \zeta_i \\ -\xi_i \zeta_i & -\eta_i \zeta_i & \xi_i^2 + \eta_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = I \boldsymbol{\omega} \quad (20)$$

ここで右辺の和を取った後の 3x3 行列を慣性テンソルと呼びます。また、その対角項は慣性モーメント、非対角項を慣性乗積と呼びます。慣性乗積は対称性が良い物体では、その座標系ですでに 0 となっていることもあります。この時の軸が回転軸である運動が安定です。この回転軸を慣性主軸と呼びます。均一な立方体など、主軸を 4 つ以上持つ場合もあります。慣性乗積は回転軸に対する非対称性が表れていると考えることができますので、単純な形の剛体であれば主軸がどこにあるか見当を付けることができます。

また、こうした成分を持つ量を何故テンソルと呼ぶのかは、式を見通しの良い形にするための座標変換を考えることで分かります。

今、慣性テンソルを対角化できる座標系を  $(\Xi, H, Z)$  とします。現座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  から移すための変換行列を  $T$  ( $3 \times 3$  行列) とし、逆行列を  $T^{-1}$  で表すと、(20) 式は次のようになることが分かります。なお、慣性テンソルは対称行列となっているので、必ず対角化できることが線形代数から知られています。

$$\begin{pmatrix} L'_\Xi \\ L'_H \\ L'_Z \end{pmatrix} = T \mathbf{L}' = T I \boldsymbol{\omega} = T I T^{-1} T \boldsymbol{\omega} = (T I T^{-1}) (T \boldsymbol{\omega}) \quad (21)$$

$$= \begin{pmatrix} I_{\Xi\Xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{HH} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\Xi \\ \omega_H \\ \omega_Z \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$= \begin{pmatrix} I_{\Xi\Xi} \omega_\Xi \\ I_{HH} \omega_H \\ I_{ZZ} \omega_Z \end{pmatrix} \quad (23)$$

このように座標変換される量  $(T I T^{-1})$  を (2 階の) テンソルと呼んでいます。ベクトルの変換 ( $\boldsymbol{\omega}$  の変換) と異なっていることに注意してください。これ以降の  $(\xi, \eta, \zeta)$  は主軸変換された後の座標系を表しているとし  
ます。

## 2.3 オイラーの式

剛体の回転運動の方程式は次のようになります。

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\mathbf{L}_G + \mathbf{L}')}{dt} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_i \mathbf{N}_i \quad (24)$$

重心の角運動量  $\mathbf{L}_G$  は、(11) 式の通り

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} &= \frac{d(\mathbf{r}_G \times M\dot{\mathbf{r}}_G)}{dt} \\ &= M\mathbf{r}_G \times \ddot{\mathbf{r}}_G \end{aligned} \quad (25)$$

一方、 $\mathbf{L}'$  は慣性テンソルを主軸変換してあるので、次のようになります。(主軸変換して慣性テンソルを対角化していないと複雑な式になり、解くことが困難です。) この時、慣性モーメントは  $(\xi, \eta, \zeta)$  が変化しないので、定数となっています。

$$\mathbf{L}' = \begin{pmatrix} I_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\zeta\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} \quad (26)$$

よって (10) 式より回転部分の運動方程式を  $(\xi, \eta, \zeta)$  成分ごとの式にすると、次のようになります。

$$I_{\xi\xi} \frac{d\omega_\xi}{dt} - (I_{\eta\eta} - I_{\zeta\zeta}) \omega_\eta \omega_\zeta = \left\{ \sum_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i) \right\}_\xi \quad (27)$$

$$I_{\eta\eta} \frac{d\omega_\eta}{dt} - (I_{\zeta\zeta} - I_{\xi\xi}) \omega_\zeta \omega_\xi = \left\{ \sum_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i) \right\}_\eta \quad (28)$$

$$I_{\zeta\zeta} \frac{d\omega_\zeta}{dt} - (I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta}) \omega_\xi \omega_\eta = \left\{ \sum_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i) \right\}_\zeta \quad (29)$$

これをオイラーの式と呼びますが、主軸変換してあっても複雑な連立式となっています。しかし、慣性系(外の「静止した」系)でこれを書き表そうとするともっと複雑になります。

また、外力がない場合(右辺が0の場合)、式から直ぐに見て取れる次のような安定な運動を行う解を持つことが分かります。

- 回転していない解 ( $\omega_\xi = \omega_\eta = \omega_\zeta = 0$ )
- 1つの主軸周りのみで一定の角速度で回転する解 (例えば,  $\omega_\xi = \omega = const.$ ,  $\omega_\eta = \omega_\zeta = 0$ )
- 1つの主軸周りでのみ回転していない, つまり2つの主軸周りで, それぞれ一定な角速度で回転する解 (例えば,  $\omega_\zeta = 0$ ,  $\omega_\xi = const. = C_1$ ,  $\omega_\eta = const. = C_2$ , このとき第三式から  $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta}$  となる必要がある)
- 主慣性モーメント3つが全ての軸で等しい場合 ( $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = I_{\zeta\zeta}$ , この対称性が高い場合ではそれぞれ異なる角速度で良い)

## 2.4 オイラー角

### 2.4.1 オイラー角

重力が働く状態でジャイロスコープやコマなど、1つの固定点を持ち回転軸に垂直な方向では対象性を持つ剛体の運動を考えます。

これまで回転する剛体の運動を記述するには、物体に固定された座標系を用いるほうが簡単になることを見ました。今度は固定点を持ち回転している剛体なので、回転の主軸に対する角速度ベクトルを導入することを考えます。3次元なので主軸は3つあり、よってそれぞれの主軸に対する角速度を成分とするベクトルが角速度ベクトル、と言えます。その扱いを簡単にするためにオイラー角という角度を考え、剛体とともに動く座標系を記述します。

剛体の一点が固定されていて、それ以外の他の一点が決まれば、その2点を結ぶ直線が回転軸でない限り、剛体全体の位置が決定できます。まず、剛体の1点を次のような方法で指定します。注意するのは、動いている座標系は剛体に固定されているので、動く座標系の慣性系に対する変化であり、動く座標系では剛体は動いていません。3次元なので、3回座標系を動かすことで、剛体が動いていても動く座標系では不動とできます。また、 $t = 0$ で慣性系の $(x, y, z)$ 座標と動く座標系 $(\xi, \eta, \zeta)$ は一致しており、固定点 $O$ を原点に取ります。剛体の回転軸は $\zeta$ 軸になるようにします。

当然ですがジャイロスコープやコマがこのように動くということではありません。時間 $t$ とともに変化する位置(角度)を都度このような考えで決まる角度を持って表す、ということです。

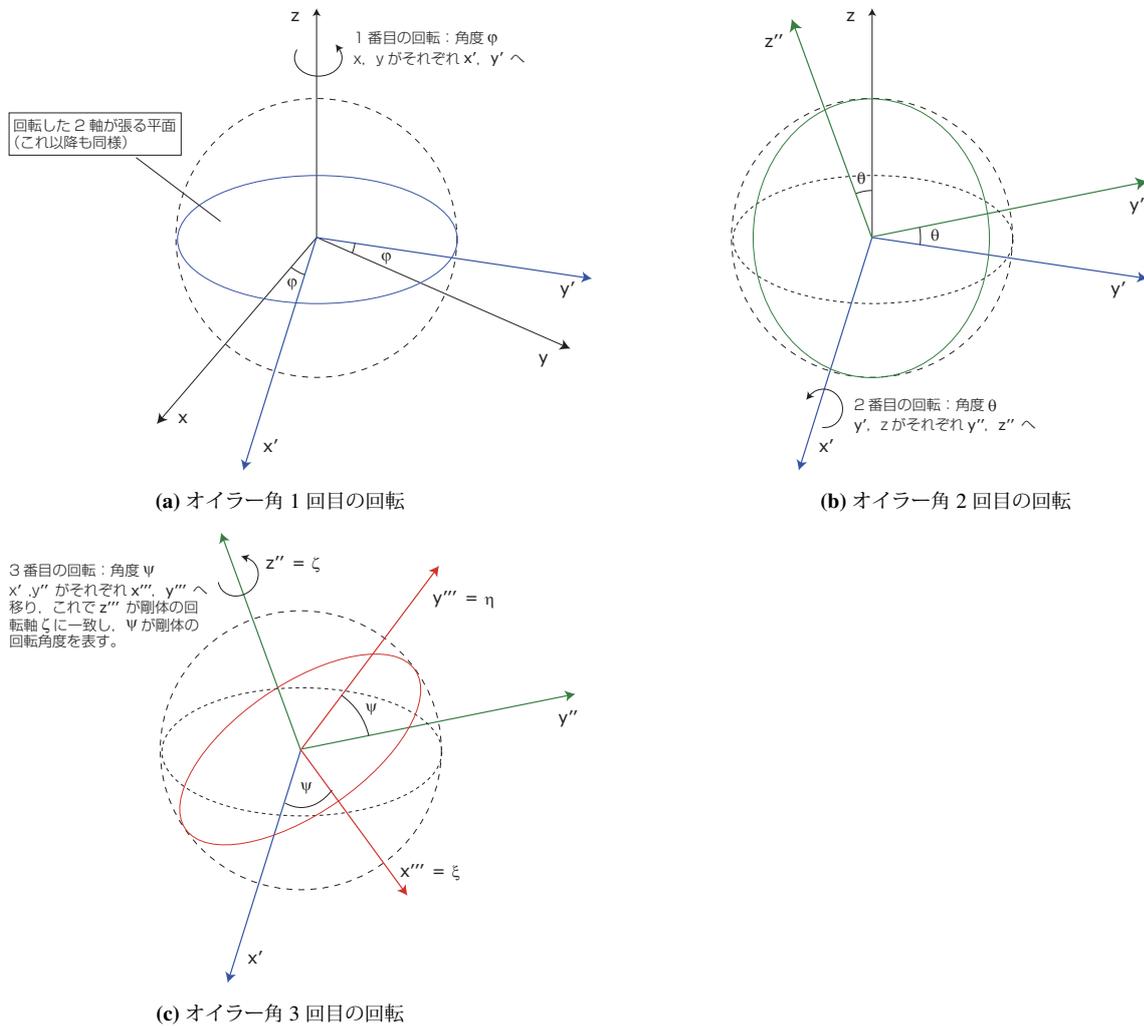


図 2: オイラー角の回転変換の順番 (zxz)

ここでのオイラー角の指定方法を順番に見ていきます。図 2 を参照してください。

1.  $z$  軸周りに  $x - y$  平面を  $\varphi$  回す
2.  $x'$  軸周りに  $y' - z$  平面を  $\theta$  回す
3.  $z''$  軸周りに  $x' - y''$  平面を  $\psi$  回す

極座標と似ていますが、こちらは物体と一緒に座標系が動いています。

- 極座標：座標系は固定で、物体の位置が極座標上で変化する。
- オイラー角：座標系は物体に固定で、物体の位置は動く座標系では不変だが、動く座標系が外の静止した座標系に対して変化する。また  $\theta, \varphi$  は極座標での  $\theta, \varphi$  に一致するわけではない。

なお、オイラー角の指定方法には任意性があり、上の方法は (zxz) と示します。 $z$  軸の回転  $\rightarrow$   $y$  軸の回転  $\rightarrow$   $z$  軸の回転という (zyz) など異なる座標系を動かす方法などもあります。しかし、それらでオイラー角の値は

異なるため、どのような変換で指定しているのか確認しましょう。

## 2.4.2 オイラー角を用いたオイラーの式

次に剛体の角速度ベクトルをオイラー角を用いて表すことを考えます。回転軸が3つなので、角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  は次のように分解できます。

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi + \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta + \frac{d\psi}{dt}\mathbf{e}_\psi \quad (30)$$

ここでそれぞれの  $\mathbf{e}$  はその回転の向き（右ねじ）の単位ベクトルとします。

図2を見ると  $\mathbf{e}_\varphi$  は  $\mathbf{e}_z$  と等しく、 $\mathbf{e}_\psi = \mathbf{e}_\zeta$  です。

よって

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_z + \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta + \frac{d\psi}{dt}\mathbf{e}_\zeta \quad (31)$$

と書けます。

オイラーの式に入れるため  $\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  を  $\mathbf{e}_\xi$ ,  $\mathbf{e}_\eta$ ,  $\mathbf{e}_\zeta$  で表すことを考えます。オイラー角の図にそれぞれの単位ベクトルを書き込んだ図が図3です。これを見ると  $\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  は次のように書けます。

$$\mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}_\zeta + \sin\theta\mathbf{e}_\eta \quad (32)$$

$$= \cos\theta\mathbf{e}_\zeta + \sin\theta\cos\psi\mathbf{e}_\xi + \sin\theta\sin\psi\mathbf{e}_\eta \quad (33)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos\psi\mathbf{e}_\xi - \sin\psi\mathbf{e}_\eta \quad (34)$$

$$\therefore \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z + \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\psi}\mathbf{e}_\zeta \quad (35)$$

$$\begin{aligned} &= (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\mathbf{e}_\xi \\ &\quad + (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\mathbf{e}_\eta \\ &\quad + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\mathbf{e}_\zeta \end{aligned} \quad (36)$$

ジャイロスコープやコマのように回転軸 ( $\zeta$  軸) に垂直な方向は対称な剛体を考えるので、 $\zeta$  軸上にある重心までの距離を  $l$  とすれば、剛体に働く重力による力のモーメント  $\mathbf{N}$  は大きさ  $mgl\sin\theta$ 、またその向きは図3から明らかのように  $\mathbf{e}_\theta$  の向きになります。

$$\mathbf{N} = mgl\sin\theta\mathbf{e}_\theta \quad (37)$$

$$= mgl\sin\theta\cos\psi\mathbf{e}_\xi - mgl\sin\theta\sin\psi\mathbf{e}_\eta \quad (38)$$

これらを使ってオイラーの式を書き直すと

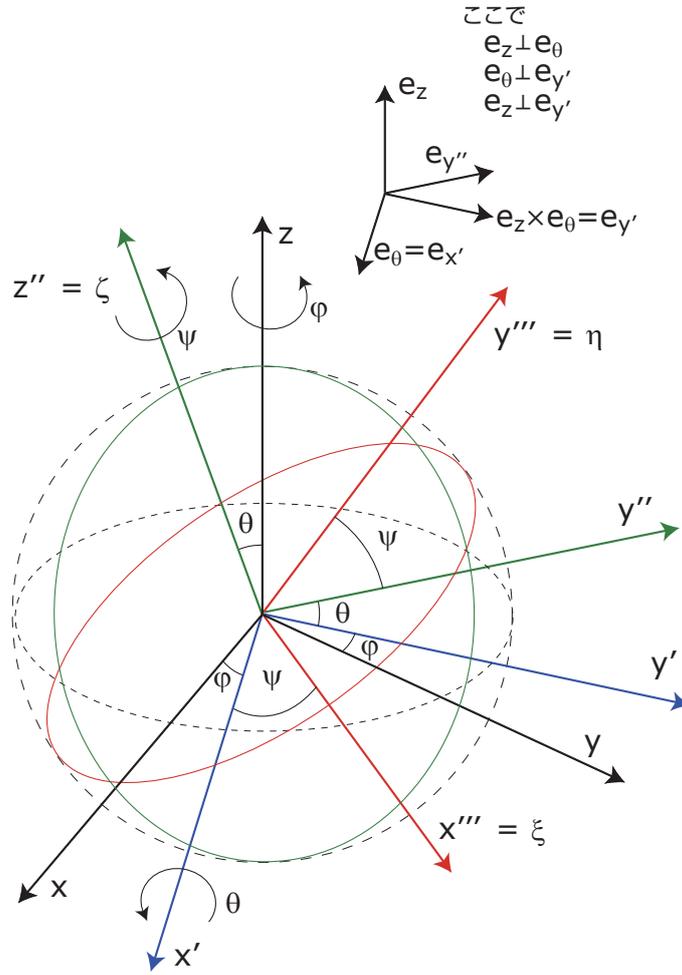


図 3: オイラー角の角速度ベクトルと各座標系

$$I_{\xi\xi} \frac{d\omega_\xi}{dt} - (I_{\eta\eta} - I_{\zeta\zeta}) \omega_\eta \omega_\zeta = I_{\xi\xi} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) - (I_{\eta\eta} - I_{\zeta\zeta}) (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = mgl \sin \theta \cos \psi \quad (39)$$

$$I_{\eta\eta} \frac{d\omega_\eta}{dt} - (I_{\zeta\zeta} - I_{\xi\xi}) \omega_\zeta \omega_\xi = I_{\eta\eta} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) - (I_{\zeta\zeta} - I_{\xi\xi}) (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = -mgl \sin \theta \sin \psi \quad (40)$$

$$I_{\zeta\zeta} \frac{d\omega_\zeta}{dt} - (I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta}) \omega_\xi \omega_\eta = I_{\zeta\zeta} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = 0 \quad (41)$$

ここで  $\zeta$  軸に垂直な方向は対称な剛体なので  $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta}$  を使っています。この慣性モーメントを  $I_0$  とします。(41) 式から  $\omega_\zeta$  が定数ということが分かり、これを  $\Omega$  とします。

$$\omega_z = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \equiv \Omega \quad (42)$$

### 2.4.3 角運動量の保存, 重力下でのジャイロスコープやコマ

この系（剛体）での角運動量の  $z$  成分  $L_z$  が保存量であることを見るために、オイラーの式を変形していきます。それぞれ微分を取った後に、(39) 式に  $\sin \psi$ 、(40) 式に  $\cos \psi$  を掛けて足し合わせると

$$\begin{aligned} mgl \sin \theta \cos \psi \sin \psi &= I_0(\ddot{\varphi} \sin \theta \sin^2 \psi + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \sin^2 \psi - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \cos \psi \sin \psi + \ddot{\theta} \cos \psi \sin \psi) \\ &\quad + I_1(\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \cos \psi \sin \psi + \dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi \sin \psi - \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \sin^2 \psi - \dot{\theta}\dot{\psi} \sin^2 \psi) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} -mgl \sin \theta \sin \psi \cos \psi &= I_0(\ddot{\varphi} \sin \theta \cos^2 \psi + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \cos^2 \psi + \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \sin \psi \cos \psi - \ddot{\theta} \sin \psi \cos \psi) \\ &\quad - I_1(\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \sin \psi \cos \psi + \dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \cos^2 \psi + \dot{\theta}\dot{\psi} \cos^2 \psi) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\therefore I_0(\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}) - I_1(\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}\dot{\psi}) = 0 \quad (45)$$

(42) 式を使うと

$$\begin{aligned} &I_0(\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta) + I_0\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta - I_1(\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}\dot{\psi}) \\ &= I_0(\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}) + (I_0 - I_1)(\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}\dot{\psi}) \\ &= I_0(\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}\dot{\psi}) + (I_0 - I_1)\dot{\theta}\Omega = 0 \\ \therefore \ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}\dot{\psi} + \frac{dI_0 - I_1}{dI_0} \dot{\theta}\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

ここで、 $\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \sin^2 \theta) = \ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$  を使い、 $\sin \psi$  を掛けて (46) を書き換えると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \sin^2 \theta) - \dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - \dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta + (I_0 - I_1)\dot{\theta}\Omega \sin \theta &= \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \sin^2 \theta) - \dot{\theta} \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta - \dot{\psi}) + (I_0 - I_1)\dot{\theta}\Omega \sin \theta \\ &= \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \sin^2 \theta) - \frac{I_1}{I_0} \dot{\theta} \sin \theta \Omega = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

これは積分でき、 $I_0\dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_1\Omega \cos \theta = \text{const.} = L_z$  となります。

$L_z$  は  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_z$  で求められるので、この表式となるか確かめます。オイラー角で表した  $\mathbf{L}$  を使い、オイラー角の図を参照しながら、次のように計算できます。

$$\mathbf{L} = I_{\xi\xi}\omega_\xi \mathbf{e}_\xi + I_{\eta\eta}\omega_\eta \mathbf{e}_\eta + I_{\zeta\zeta}\omega_\zeta \mathbf{e}_\zeta \quad (48)$$

$$\begin{aligned} &= I_{\xi\xi}\omega_\xi(\cos \psi \mathbf{e}_\theta + \sin \psi \mathbf{e}_{y''}) + I_{\eta\eta}\omega_\eta(\cos \psi \mathbf{e}_{y''} - \sin \psi) \mathbf{e}_\theta + I_{\zeta\zeta}\omega_\zeta \mathbf{e}_\zeta \\ &= (I_{\xi\xi}\omega_\xi \cos \psi - I_{\eta\eta}\omega_\eta \sin \psi) \mathbf{e}_\theta + (I_{\xi\xi}\omega_\xi \sin \psi + I_{\eta\eta}\omega_\eta \cos \psi) \mathbf{e}_{y''} + I_{\zeta\zeta}\omega_\zeta \mathbf{e}_\zeta \end{aligned} \quad (49)$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_z = (I_{\xi\xi}\omega_\xi \cos \psi - I_{\eta\eta}\omega_\eta \sin \psi) \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_z + (I_{\xi\xi}\omega_\xi \sin \psi + I_{\eta\eta}\omega_\eta \cos \psi) \mathbf{e}_{y''} \cdot \mathbf{e}_z + I_{\zeta\zeta}\omega_\zeta \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z \quad (50)$$

図から明らかのように、それぞれの内積は次のとおりです。

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_z = 0 \\ \mathbf{e}_{y''} \cdot \mathbf{e}_z = \sin \theta \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = \cos \theta \end{cases} \quad (51)$$

よって (36) 式と  $I_0, I_1, \Omega$  を使うと

$$\begin{aligned} L_z = \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_z &= (I_{\xi\xi}\omega_\xi \sin \psi + I_{\eta\eta}\omega_\eta \cos \psi) \sin \theta + I_{z\xi}\omega_\xi \cos \theta \\ &= I_0 \sin \theta \{ \sin \psi (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) + \cos \psi (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \} + I_1 \Omega \cos \theta \\ &= I_0 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_1 \Omega \cos \theta \end{aligned} \quad (52)$$

と  $L_z$  が先の定数と一致することが示せました。

物理的には、剛体の角運動量の  $z$  成分が一定というのは重力による力のモーメントが  $z$  軸に垂直なため、 $z$  方向の運動に寄与しないということを示しています。

#### 2.4.4 重力下でのエネルギー保存

この剛体の力学的エネルギーが保存することを確認します。前節とは逆にそれぞれ微分後に (39) 式に  $\cos \psi$ , (40) 式に  $-\sin \psi$  を掛けて和を取ります。

$$\begin{aligned} mgl \sin \theta \cos^2 \psi &= I_0 (\ddot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \psi \cos \psi - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \psi + \ddot{\theta} \cos^2 \psi) \\ &\quad + I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \psi + \dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \cos^2 \psi - \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \psi \cos \psi - \dot{\theta}^2 \sin \psi \cos \psi) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} mgl \sin \theta \sin^2 \psi &= -I_0 (\ddot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \psi \cos \psi + \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \psi - \ddot{\theta} \sin^2 \psi) \\ &\quad + I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \psi + \dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \sin^2 \psi + \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \psi \cos \psi + \dot{\theta}^2 \sin \psi \cos \psi) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\therefore mgl \sin \theta = I_0 (\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) + I_1 \Omega \dot{\varphi} \sin \theta \quad (55)$$

ここで (52) 式より  $\dot{\varphi}$  は次のように書けます。

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z - I_1 \Omega \cos \theta}{I_0 \sin \theta} \quad (56)$$

よって (55) 式は、

$$mgl \sin \theta = \frac{I_1 \Omega}{I_0} \frac{L_z - I_1 \Omega \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{I_0 \sin^3 \theta} \{ \ddot{\theta} I_0^2 \sin^3 \theta - (L_z - I_1 \Omega \cos \theta)^2 \cos \theta \} \quad (57)$$

$$\frac{mgl}{I_0} \sin \theta = \ddot{\theta} + \frac{I_1 \Omega}{I_0} \frac{L_z - I_1 \Omega \cos \theta}{I_0 \sin \theta} - \left( \frac{L_z - I_1 \Omega \cos \theta}{I_0 \sin^2 \theta} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \quad (58)$$

この式をまとめるために両辺に  $\dot{\theta}$  を掛けると、

$$\frac{mgl}{I_0} \sin \theta \dot{\theta} = \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{I_1 \Omega}{I_0} \frac{L_z - I_1 \Omega \cos \theta}{I_0 \sin \theta} \dot{\theta} - \left( \frac{L_z - I_1 \Omega \cos \theta}{I_0 \sin^2 \theta} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \quad (59)$$

ここで

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{L_z - I_1 \Omega \cos \theta}{I_0 \sin \theta} \right)^2 = 2 \left( \frac{I_1 \Omega L_z - I_1 \Omega \cos \theta}{I_0 \sin \theta} \right) \dot{\theta} - 2 \left( \frac{L_z - I_1 \Omega \cos \theta}{I_0 \sin^2 \theta} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \quad (60)$$

なので (59) 式は,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \dot{\theta}^2 + \left( \frac{L_z - I_1 \Omega \cos \theta}{I_0 \sin \theta} \right)^2 \right\} = - \frac{mgl}{I_0} \frac{d}{dt} \cos \theta \quad (61)$$

また (52) 式より,  $L_z - I_1 \Omega \cos \theta = I_0 \dot{\phi} \sin^2 \theta$  なので

$$\frac{I_0}{2} \left\{ \dot{\theta}^2 + \left( \frac{L_z - I_1 \Omega \cos \theta}{I_0 \sin \theta} \right)^2 \right\} + mgl \cos \theta = \frac{I_0}{2} \{ \dot{\theta}^2 + (\dot{\phi} \sin \theta)^2 \} + mgl \cos \theta = \text{const.} (= C) \quad (62)$$

この式はエネルギーの次元です。

(62) 式と (36) 式から計算できる  $\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2$  を比べます。

$$\omega_\xi^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \psi + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi \quad (63)$$

$$\omega_\eta^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi - 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi \quad (64)$$

$$\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \quad (65)$$

また対称性から  $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = I_0$  でした。

よって (62) 式の  $\frac{I_0}{2}$  の掛かった項は  $\xi$  軸と  $\eta$  軸に関する回転エネルギーの和であり,  $mgl \sin \theta$  は, 原点で 0 としている重力によるポテンシャルです。

その和が一定ということは  $\xi$  軸と  $\eta$  軸の回転エネルギーと重力によるポテンシャルの和が保存するということです。

また  $\zeta$  軸の回転エネルギー (ジャイロスコープやコマの「自転」) は (41) 式と (42) 式より  $\frac{I_1}{2} \Omega^2$  で, 定数です。

よって, 一定値である  $\frac{I_1}{2} \Omega^2$  を (62) 式に加えれば

$$\frac{I_0}{2} \{ \dot{\theta}^2 + (\dot{\phi} \sin \theta)^2 \} + \frac{I_1}{2} \Omega^2 + mgl \cos \theta = \text{const.} \quad (66)$$

であり, 当然, 剛体として力学的エネルギーが保存していることを示しています。

## 2.5 歳差

(61) 式は  $\theta$  のみで表されていますが, 初等関数の範囲では解けないため,  $\theta = \text{const.}$  という特別な場合について見ることにします。よって  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ 。このときの  $\dot{\phi}$  は (55) 式を使うと次の式で決まります。

$$\begin{aligned} mgl \sin \theta &= I_0(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) + I_1 \Omega \dot{\phi} \sin \theta \\ &= -I_0 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_1 \Omega \dot{\phi} \sin \theta \end{aligned}$$

よって

$$I_0\dot{\varphi}^2 \cos \theta - I_1\Omega\dot{\varphi} + mgl = 0 \quad (67)$$

これを  $\dot{\varphi}$  について解くと

$$\dot{\varphi} = \frac{I_1\Omega \pm \sqrt{(I_1\Omega)^2 - 4I_0mgl \cos \theta}}{2I_0 \cos \theta} \quad (68)$$

$\varphi$  は実数なので、その微分も実数であり

$$\Omega \geq 2 \frac{\sqrt{I_0mgl \cos \theta}}{I_1} \quad (69)$$

$$\text{但しここでは、} |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \text{ とします} \quad (70)$$

今、 $\Omega$  が十分大きい（ジャイロスコープやコマが速く回っている）とすれば、ルートをテイラー展開して次の近似解を得ます。

$$\dot{\varphi} = \begin{cases} \frac{I_1\Omega}{I_0 \cos \theta} & \text{歳差運動が速い場合} \\ \frac{mgl}{I_1\Omega} & \text{歳差運動が遅い場合} \end{cases} \quad (71)$$

速い歳差運動は軸受の摩擦によりすぐに減衰して、観察できるのは遅い方の歳差運動となります。(72)式は定数なので、一定の速度（角速度）でジャイロスコープの回転軸（ $\zeta$  軸）が回転しているということになります。

※実験解説では最初にジャイロスコープの釣り合いを取っているので、(72)式に現れる  $m$  は付加おもりの質量になります。

## 2.6 章動

(55)式で  $\dot{\varphi}$  を小さいとして  $\dot{\varphi}^2$  以上の項を落として解きます。

$$I_0\ddot{\theta} + I_1\Omega\dot{\varphi} \sin \theta = mgl \sin \theta \quad (73)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl - I_1\Omega\dot{\varphi}}{I_0} \sin \theta \quad (74)$$

また (45) 式で  $\dot{\varphi}\dot{\theta}$  を小さい（章動の歳差への影響が小さい）として落とすと、

$$\begin{aligned} I_0\ddot{\varphi} \sin \theta - I_1\dot{\theta}\dot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{\varphi} \sin \theta &= \frac{I_1}{I_0}\Omega\dot{\theta} \end{aligned} \quad (75)$$

(75)式を  $t$  で微分し  $\dot{\varphi}\dot{\theta}$  を小さいとして落とし、(74)式を用いると

$$I_0 \frac{d^3\varphi}{dt^3} \sin \theta = \frac{I_1\Omega}{I_0} (mgl - I_1\Omega\dot{\varphi}) \sin \theta \quad (76)$$

$$\therefore \frac{d^3\varphi}{dt^3} = \frac{d^2}{dt^2} \dot{\varphi} \quad (77)$$

$$= \frac{I_1\Omega}{I_0} (mgl - I_1\Omega\dot{\varphi}) \quad (78)$$

$$= - \left( \frac{I_1\Omega}{I_0} \right)^2 \left( \dot{\varphi} - \frac{mgl}{I_1\Omega} \right) \quad (79)$$

$$(80)$$

よって  $\dot{\varphi}$  は積分できて

$$\dot{\varphi} = \frac{mgl}{I_1} + A \cos(\omega't + B) \quad (81)$$

ここで A, B は初期条件で決まる定数であり,

$$\omega' = \frac{I_1 \Omega}{I_0} \quad (82)$$

です。

章動が起きているときには、歳差の角速度  $\dot{\varphi}$  が (72) 式で表される角速度を中心に、角速度  $\omega' = \frac{I_1 \Omega}{I_0}$  で周期的に変化しています。

回転軸が z 軸（垂直方向）となす角  $\theta$  は次のように求められます。(81) 式を微分して (75) 式に代入すると

$$-A\Omega' \sin \theta \sin \omega't + B = \frac{I_1}{I_0} \dot{\theta} \quad (83)$$

$\theta$  の変動は小さいとして  $\sin \theta = \sin \theta_0 = \text{一定値}$  と置き換えると、(83) 式は積分できて

$$\dot{\theta} = -\frac{AI_0\omega'}{I_1\Omega} \sin \theta_0 \sin(\omega't + B) + C \quad (84)$$

$$\therefore \theta(t) = \frac{A}{\omega'} \sin \theta_0 \cos(\omega't + B) + C \quad (85)$$

となり、章動を表しています。(C は定数)

(85) 式から、章動とは回転体（ジャイロスコープやコマ）の回転軸が初期状態で決まる角度  $\theta_0$  を中心として、角速度  $\omega' = \frac{I_1 \Omega}{I_0}$  で振動するという運動になっています。このとき (81) 式から歳差も起きており、回転軸は歳差と章動を重ね合わせた運動をすることになります。