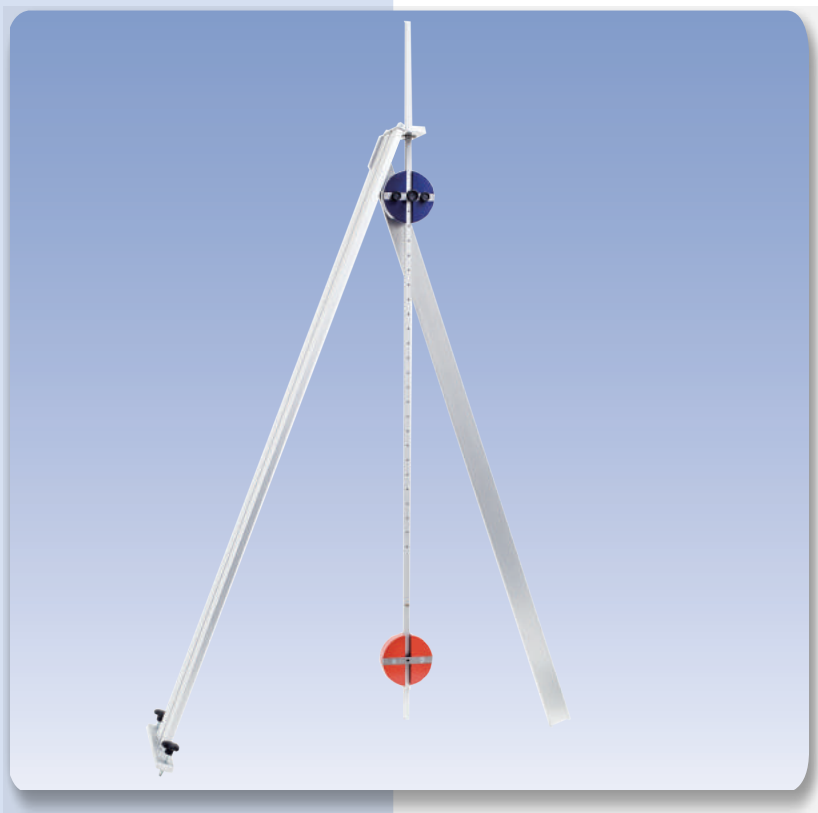




目的

ケーターの可逆振り子を使って、計測地点における重力加速度を求めること。

実験の手順

- 2つの支点、どちらでも振動周期が同じになるように、可逆振り子を調整します。
- この時の振動周期から、計測地点における重力加速度を計算します。

まとめ

可逆振り子は、正確な重力加速度を求めるための装置です。可逆振り子には支点が2つあり、そのどちらを使っても振動周期が同一になるように調節できます。その場合の振り子の単振り子相当長は、2つの支点間の距離に等しくなります。これにより重心位置や慣性モーメントを求めることなく、振動周期と可逆振り子の単振り子相当長とを使って、計測地点における重力加速度が求められます。

可逆振り子は、2つの支点の外側にある、より重いおもりの位置を固定したまま、支点間にあるおもりの位置を調整することで、振動周期を一致させます。

必要機器

品番	品名	数量
U8557170	ケーターの可逆振り子	1
U11902	デジタルストップウォッチ	1

基本原理

可逆振り子は2つの支点を持つ実体振り子で、取り付けられたおもりを移動させることで2つの支点での振動周期を一致させることができます。この時、単振り子相当長は支点間の距離となり、周期と単振り子相当長から、慣性モーメントや重心位置を求めることなく、計測地点での重力加速度を計算することが可能となります。

実体振り子が静止位置からの角度 ϕ で自由に振動する場合、その運動方程式は以下のようになります。

$$J \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2} = -m \cdot g \cdot s \cdot \sin\phi$$

今、角度 ϕ が十分小さく $\sin\phi \sim \phi$ と書ける場合、次の形になります。(本実験器では振幅を5cm以下にしてください。)

$$(1) \quad \frac{J}{m \cdot s} \cdot \ddot{\phi} + g \cdot \phi = 0$$

J: 振動軸に関する慣性モーメント、g: 重力加速度
m: 振り子の質量、s: 振動軸と重心との距離

基礎実験

- 仕様は予告なく変更されることがあります。
- 品番・製品名をクリックすると製品仕様ページ（外部サイト）が開きます。

ここで実体振り子の単振り子相当長Lを求めます。単振り子相当長Lとは「その長さの理想的な単振り子と同じ周期になる」Lという意味です。理想的な単振り子の運動方程式は $L \cdot \ddot{\phi} + g \cdot \phi = 0$ なので、式(1)から明らかにLは

$$(2) \quad L = \frac{J}{m \cdot s}$$

となります。

また、平行軸の定理を使うと、振り子の慣性モーメントは以下のように与えられます。

$$J = J_s + m \cdot s^2$$

J_s : 重心を通る軸の周りの慣性モーメント

これを単振り子相当長Lの式(2)と組み合わせると

$$(3) \quad L = \frac{J_s}{m \cdot s} + s$$

となり、s-L平面上の $s = \sqrt{\frac{J_s}{m}}$ で極小値を持つ、下に凸の曲線になります。(図2)

その為、極小値以外では同じ単振り子相当長となる2つのsが存在します。単振り子相当長が等しいので、周期Tも等しくなります。本実験装置はこの性質を利用しています。

周期Tが等しいときの重心から支点までの距離2つを s_1 、 s_2 とし、この時の単振り子相当長をLとすると次の式が成り立ちます。

$$\frac{J_s}{m \cdot s_1} + s_1 = \frac{J_s}{m \cdot s_2} + s_2 = L$$

s_2 について解けば

$$s_2 = \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{J_s}{m}}$$

s_1 も同じ式となるので $s_1 > s_2$ とすると、第二項正が s_1 、負が s_2 になります。

一方、本実験装置は距離dだけ離れた2つの支点を持つ可逆振り子なので、片方の重心までの距離sならば、他方の重心までの距離はd-sとなります。sとd-sのどちらか大きい方は上式 s_1 、短い方を s_2 と代入することで、次の結果を得ます。

$$L = d$$

$$(4) \quad s_1 = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{J_s}{m}}, \quad s_2 = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{J_s}{m}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{d}{g}}$$

これより、可逆振り子で両支点での周期が等しくなるように調節すると、単振り子相当長は支点間距離dに等しくなること、その時の周期Tは振り子の実際の慣性モーメントや重心位置に依存しないことが分かります。

本実験では、2つの支点の間にある質量 $m_2 = 1 \text{ kg}$ のおもりを適宜動かすことにより、可逆振り子の振動周期を一致させることができます。もう一方のおもり、質量 $m_1 = 1.4 \text{ kg}$ は、2つの支点の外側に固定されています。周期は、振り子の下端が振動の中心位置を通過する時間をストップウォッチで計測することで求めます。(振動体の周期測定方法を参照)

これにより、単振り子相当長 L_1 と L_2 とに対する振動周期 T_1 と T_2 を、質量 m_2 のおもりの位置 x_2 の関数としてグラフをプロットします。

評価

2つの振動周期 $T_1(x_2)$ と $T_2(x_2)$ の曲線は、周期が $T = T_1 = T_2$ を満たす点で2度交わります。交点の正確な位置(x_2 の値)を決めるには、測定点の内挿が必要になります。重力加速度は、本実験装置の加工精度から0.03%の相対精度で、以下のように計算できます。

$$(5) \quad g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot d, \quad d = 0.8 \text{ m}$$

ここでdは支点間距離です。

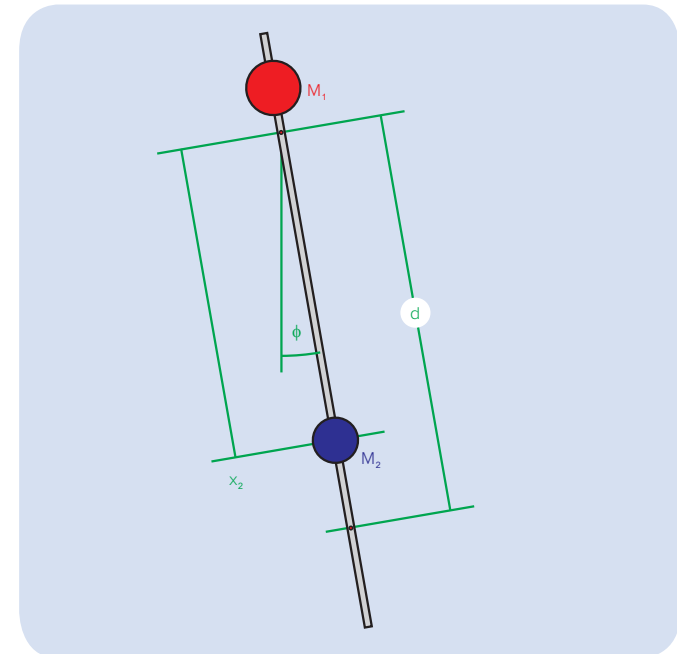


図1：可逆振り子の概念図

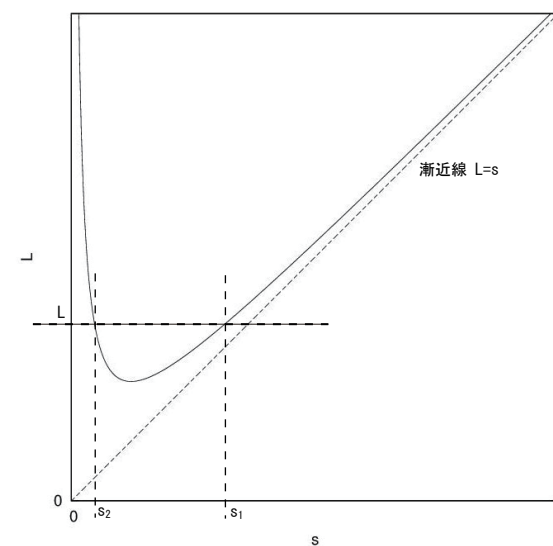


図2：支点-重心間距離sと単振り子相当長Lのグラフ

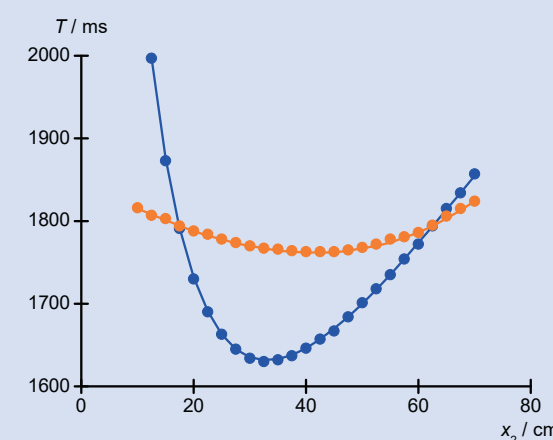


図3：質量 m_2 のおもり位置 x_2 に対する周期 T_1 と T_2 の測定値