

# UE1050600 連成振動の運動方程式

3B Scientific

7 May 2020

## 1 目的

2本の棒振り子をバネで繋いだ連成振動を運動方程式から求める。

## 2 運動方程式

### 2.1 モデル

UE1050600では2本の等しい棒振り子を1本のバネで接続し、振動周期を測定しました。これをもう少し一般的な異なる2本の棒振り子をバネで接続したときの連成振動を考えます。(図1)ここで

- $M_0$ : 振り子支柱の質量
- $L$ : 支柱長さ
- $M_1$ : 振り子おもり質量
- $x_1, x_2$ : 振り子支点からの振り子おもり中心位置 (左の振り子を1, 右を2と表記します)
- $x_{G1}, x_{G2}$ : それぞれの振り子の重心
- $\varphi_1, \varphi_2$ : それぞれの振り子の振れ角 (右を正とします)
- $k$ : バネ定数 (振り子が振れていないときの振り子間隔をバネの自然長とします)
- $\alpha L$ : ばねの振り子支柱への取り付け位置 (2つの振り子とも同じ位置とします)

ここで  $\alpha$  は  $0 < \alpha \leq 1$  の定数です。

振り子支柱単体の重心は当然  $x_{G0} = L/2$  であることから、振り子おもり位置が  $x_1$  のときの振り子全体としての重心  $x_G$  は次のように計算できます。

$$(M_0 + M_1)x_G = M_0 \frac{L}{2} + M_1 x_1$$
$$x_G = \frac{M_0 \frac{L}{2} + M_1 x_1}{M_0 + M_1} = \frac{M_0 \frac{L}{2} + M_1 x_1}{M_2}$$

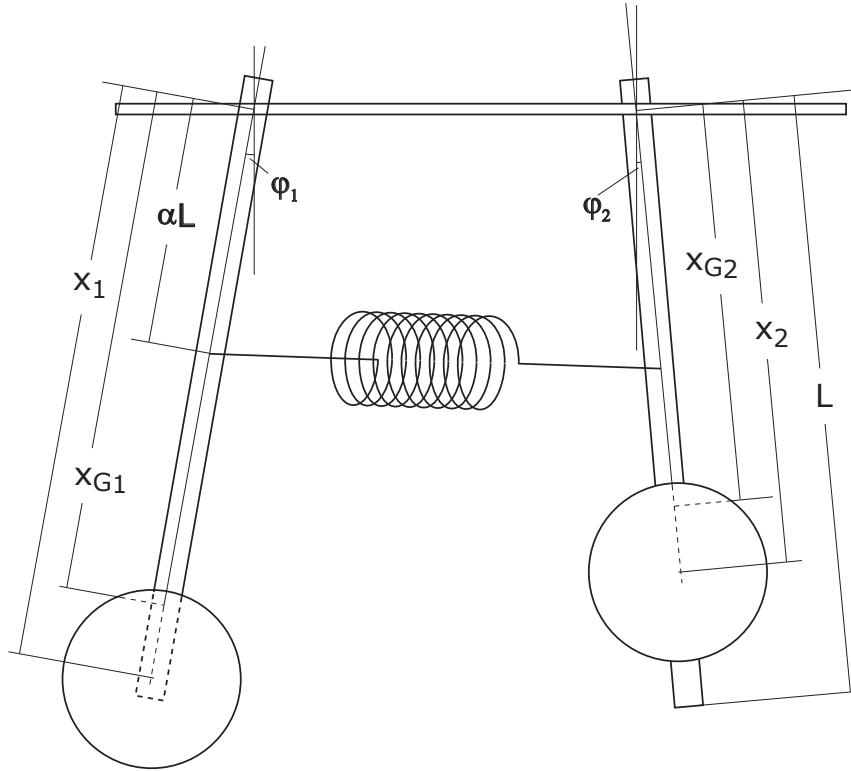


図 1: バネで接続された 2 本の棒振り子

振り子支柱単体の慣性モーメントを  $I_0$  は、

$$I_0 = \int_0^L \rho(x)x^2 dx = \rho \frac{L^3}{3} = \frac{M_0 L^2}{3}$$

です。

よって振り子全体の慣性モーメントは、回転軸が同じで同一直線状にあるので、これにおもりの慣性モーメントを加えたものとなります。

$$I_0 + I_1 = \frac{M_0 L^2}{3} + M_1 x_1^2$$

振り子の振れ角  $\varphi$  が小さいとすれば、バネの伸縮は  $\alpha L \sin \varphi \sim \alpha L \varphi$  と表せます。

向かって左の振り子の運動方程式を考えます。固定された回転軸を持つ運動であり、右側の振り子の振れ角によってもバネの伸縮が変わることから、次のようになります。

$$\begin{aligned} (I_0 + I_1) \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= -M_2 g x_{G1} \sin \varphi_1 - k(x_{s1} \cos \varphi_1 - x_{s2} \cos \varphi_2) \\ &\sim -M_2 g x_{G1} \varphi_1 - k \alpha^2 L^2 (\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

右辺で  $\varphi_1, \varphi_2$  の 3 次以上の項を微小量として落としています。

右側の振り子についても同様に考えられるので、次の2つの運動方程式が得られます。

$$\begin{cases} (I_0 + I_1)\ddot{\varphi}_1 = -M_2 g x_{G1} \varphi_1 - k\alpha^2 L^2 (\varphi_1 - \varphi_2) \\ (I_0 + I_2)\ddot{\varphi}_2 = -M_2 g x_{G2} \varphi_2 - k\alpha^2 L^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \end{cases}$$

書き直すと

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{I_0 + I_1} \{-M_2 g x_{G1} \varphi_1 - k\alpha^2 L^2 (\varphi_1 - \varphi_2)\} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{I_0 + I_2} \{-M_2 g x_{G2} \varphi_2 - k\alpha^2 L^2 (\varphi_2 - \varphi_1)\} & (2) \end{cases}$$

このように互いに対称な運動方程式が2つ得られました。

## 2.2 運動方程式の解

運動方程式 (1)(2) 式の解を考えます。

鍊成運動の解を求める系統的な方法<sup>\*1</sup>もありますが、連成振動はそれぞれの変位の比が特定の値で全ての物体が同じ振動数で単振動することが知られています。これを規準振動といいます。また、一般の連成振動は規準振動の重ね合わせで表現できます。

ここでは振り子が2つと振動体の数が少ないので、

$$\frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 + \beta\varphi_2) = -a(\varphi_1 + \beta\varphi_2)$$

の単振動解を持つような式となるように定数  $a$ ,  $\beta$  を求めます。この場合、変位  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  の比が  $\beta$  であり、角振動数  $\omega = \sqrt{a}$  になっています。

まず (2) 式に  $\beta$  を掛けて足し合わせてみます。また煩雑なので、次の置き換えをします。

$$\begin{cases} L' = \alpha L \\ I_1' = I_0 + I_1 \\ I_2' = I_0 + I_2 \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 + \beta\varphi_2) &= \frac{1}{I_1'} \{-M_2 g x_{G1} \varphi_1 - kL'^2 (\varphi_1 - \varphi_2)\} + \frac{\beta}{I_2'} \{-M_2 g x_{G2} \varphi_2 - kL'^2 (\varphi_2 - \varphi_1)\} \\ &= -\left( \frac{M_2 g x_{G1} + kL'^2}{I_1'} - \frac{\beta kL'^2}{I_2'} \right) \varphi_1 - \left\{ \frac{\beta(M_2 g x_{G2} + kL'^2)}{I_2'} - \frac{kL'^2}{I_1'} \right\} \varphi_2 \\ &= -a(\varphi_1 + \beta\varphi_2) \end{aligned}$$

これから  $a$ ,  $\beta$  は次の連立式で決まります。

$$\begin{cases} a = \frac{M_2 g x_{G1} + kL'^2}{I_1'} - \frac{\beta kL'^2}{I_2'} & (3) \\ a\beta = \frac{\beta(M_2 g x_{G2} + kL'^2)}{I_2'} - \frac{kL'^2}{I_1'} & (4) \end{cases}$$

\*1 3章で説明します

この連立式を満たすためには  $\beta$  が次の値になります。<sup>\*2</sup>

$$\beta = \frac{I_2'}{2kL^2} \left\{ \frac{M_2gx_{G1} + kL^2}{I_1'} - \frac{M_2gx_{G2} + kL^2}{I_2'} \pm \sqrt{\left( \frac{M_2gx_{G1} + kL^2}{I_1'} - \frac{M_2gx_{G2} + kL^2}{I_2'} \right)^2 + 4 \frac{k^2L^4}{I_1'I_2'}} \right\} \quad (5)$$

根号の中は正なので、 $\beta$  は実数で2つの値を取ります。根号の符号が+の場合を  $\beta_+$ 、-の場合を  $\beta_-$  とします。 $a$  は  $\beta$  から (3) 式で決定されるので、各  $\beta$  に対応する  $a$  をそれぞれ  $a_+$ 、 $a_-$  と書くことにします。

これらにより運動方程式は、次のようになります。

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 + \beta_+\varphi_2) = -a_+(\varphi_1 + \beta_+\varphi_2) \\ \frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 + \beta_-\varphi_2) = -a_-(\varphi_1 + \beta_-\varphi_2) \end{cases}$$

2つの運動方程式は単振動の式なので、次の解を持ちます。

$$\begin{cases} \varphi_1 + \beta_+\varphi_2 = A \sin(\omega_+t + \varphi_+) \\ \varphi_1 + \beta_-\varphi_2 = B \sin(\omega_-t + \varphi_-) \end{cases}$$

ここで、

$$\omega_+ = \sqrt{a_+} = \sqrt{\frac{M_2gx_{G1} + kL^2}{I_1'} - \frac{\beta_+kL^2}{I_2'}} \quad (6)$$

$$= \sqrt{\frac{M_2gx_{G1} + kL^2}{2I_1'} + \frac{M_2gx_{G2} + kL^2}{2I_2'}} + \sqrt{\left( \frac{M_2gx_{G1} + kL^2}{2I_1'} - \frac{M_2gx_{G2} + kL^2}{2I_2'} \right)^2 + \frac{kL^2}{I_2'} \frac{kL^2}{I_1'}}$$

$$\omega_- = \sqrt{a_-} = \sqrt{\frac{M_2gx_{G1} + kL^2}{I_1'} - \frac{\beta_-kL^2}{I_2'}} \quad (7)$$

$$= \sqrt{\frac{M_2gx_{G1} + kL^2}{2I_1'} + \frac{M_2gx_{G2} + kL^2}{2I_2'}} - \sqrt{\left( \frac{M_2gx_{G1} + kL^2}{2I_1'} - \frac{M_2gx_{G2} + kL^2}{2I_2'} \right)^2 + \frac{kL^2}{I_2'} \frac{kL^2}{I_1'}}$$

であり、 $A$ 、 $B$ 、 $\varphi_+$ 、 $\varphi_-$  は初期条件より決まる定数です。

これから  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  は次のようになります。

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{\beta_- - \beta_+} \{A\beta_- \sin(\omega_+t + \varphi_+) - B\beta_+ \sin(\omega_-t + \varphi_-)\} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \varphi_2 = \frac{1}{\beta_+ - \beta_-} \{A \sin(\omega_+t + \varphi_+) - B \sin(\omega_-t + \varphi_-)\} \end{cases} \quad (9)$$

2階の連立微分方程式2つに対して初期条件で決まる任意定数が4つあるので、任意の連成振動はそれぞれ規準振動の重ね合わせで表現できる振動をしていることが分かります。<sup>\*3</sup>

式が入り組んでいるので、いくつかの場合についてどのような振動となるかを見ることがあります。

<sup>\*2</sup>  $a$  として (3) 式を (4) 式に代入し  $\beta$  の二次式にして解を求めます。

<sup>\*3</sup>  $\varphi \propto \sin(\omega t)$  で戸惑うかもしれませんが、元々  $\varphi$  が十分小さいとして  $\sin \varphi \sim \varphi$  と変位を角度に変えていたためです。

## 2.3 いくつかの例

2.3.1  $x_1 = x_2$ , 振り子のおもり取り付け位置が等しい場合

実験で行った等価な振り子 2 つのバネによる連成振動となります。このとき  $I_1 = I_2$  であり,  $x_{G1} = x_{G2}$  です。このため (5) 式は非常に簡単になり  $\beta = \pm 1$  となります。

このとき  $\omega_{\pm}$  は (6)(7) 式より

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_+ = \sqrt{\frac{M_2 g x_{G1}}{I_1'}} \\ \omega_- = \sqrt{\frac{M_2 g x_{G1} + 2kL'^2}{I_1'}} \end{array} \right. \quad (10)$$

$\omega_+$  は自由な (他と繋がっていない) 振り子の角振動数であり, 実験では 2 つの振り子が同位相の場合です。一方,  $\omega_-$  は接続したバネの影響が入っています。これは 2 つの振り子の位相が  $\pi$  ずれた連成振動に当たります。

この規準振動の角振動数での  $t - \varphi_1$  のグラフが図 2 です。ここで "in phase" は同位相, "out of

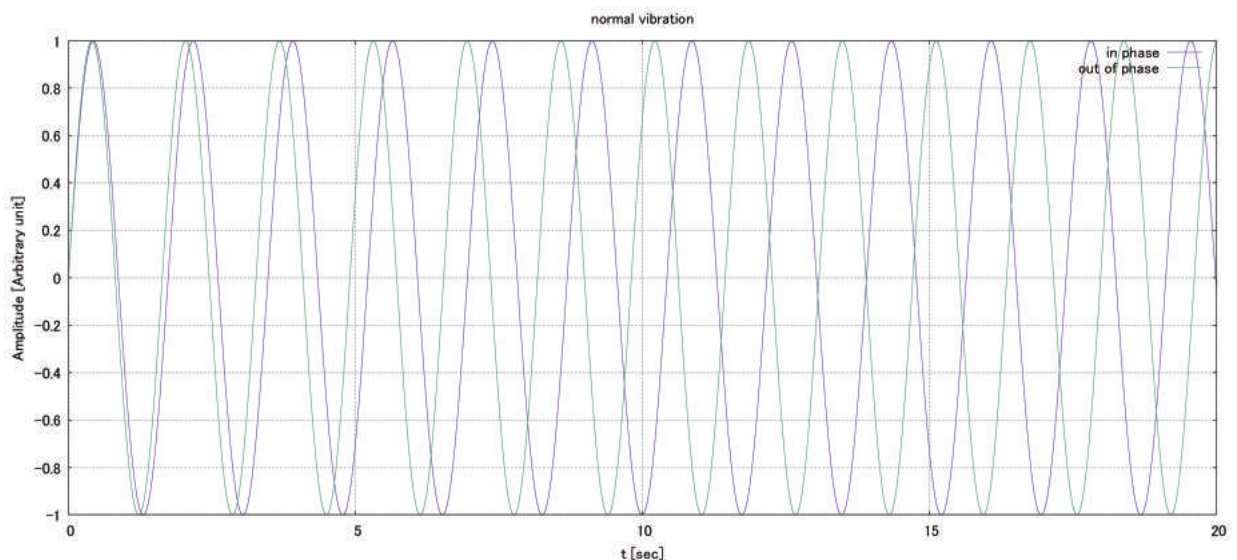


図 2: 等価な振り子の規準振動

phase" は逆位相 ( $\pi$  ずれた) の振動です。使ったパラメータは実験のサンプルデータと同じで, 以下の通りです。ただし, 振り子支柱の質量が不明なため無視し,  $x_{G1} = x_1 = L, M_2 = M_1$  としています。

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 3.0 \text{ N/m} \\ M_2 = 1.0 \text{ kg} \\ x_{G1} = x_1 = 0.75 \text{ m} \\ L = 0.75 \text{ m} \\ L' = \alpha L = 0.4 \text{ m} \end{array} \right.$$

これから、2つの等価な振り子の連成振動は、一般にそれぞれ次のように表せます。

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2} \{A \sin(\omega_+ t + \varphi_+) + B \sin(\omega_- t + \varphi_-)\} & (12) \\ \varphi_2 = \frac{1}{2} \{A \sin(\omega_+ t + \varphi_+) - B \sin(\omega_- t + \varphi_-)\} & (13) \end{cases}$$

このような規準振動ではない連成振動は振幅のうなりを生じ、エネルギーが2つの振り子の間をバネを通じてお互いに行き来します。

バネを通じてエネルギーをやり取りする具体例として、次のような初期条件を考えてみましょう。

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_0 \\ \varphi_2 = 0 \\ L\dot{\varphi}_1 = 0 \\ L\dot{\varphi}_2 = 0 \end{cases}$$

$t = 0$ の初期状態で、1つの振り子（左側とします）が角度  $\varphi_0$  で静止、右側は最下点で静止している、という条件です。

実験としては、右側の振り子を軽く手で抑えておき、左側の振り子を適当な角度まで持ち上げ、同時に手を離す、というものです。

(12)(13)式にこの初期条件を当てはめると

$$\varphi_1(t=0) = \frac{1}{2}(A \sin \varphi_+ + B \sin \varphi_-) = \varphi_0 \quad (14)$$

$$\varphi_2(t=0) = \frac{1}{2}(A \sin \varphi_+ - B \sin \varphi_-) = 0 \quad (15)$$

$$\dot{\varphi}_1|_{t=0} = \frac{1}{2}(A\omega_+ \cos \varphi_+ + B\omega_- \cos \varphi_-) = 0 \quad (16)$$

$$\dot{\varphi}_2|_{t=0} = \frac{1}{2}(A\omega_+ \cos \varphi_+ - B\omega_- \cos \varphi_-) = 0 \quad (17)$$

(14)(15)式より  $A \neq 0, B \neq 0$  が分かり

$$A \sin \varphi_+ = B \sin \varphi_- = \varphi_0 \quad (18)$$

です。

また (16)(17)式から

$$\cos \varphi_+ = \cos \varphi_- = 0$$

よって

$$\varphi_+ = \varphi_- = \frac{\pi}{2}$$

これと (18)式より

$$A = B = \varphi_0$$

となり、 $\varphi_1, \varphi_2$  は次のように表されます。

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2} \left\{ \sin\left(\omega_+ t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\omega_- t + \frac{\pi}{2}\right) \right\} = \frac{\varphi_0}{2} \{ \cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t) \} \\ \varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2} \left\{ \sin\left(\omega_+ t + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\omega_- t + \frac{\pi}{2}\right) \right\} = \frac{\varphi_0}{2} \{ \cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t) \} \end{cases}$$

ここで次の変数変換をします。

$$\begin{cases} \omega_m = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \\ \omega_\Delta = \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \end{cases}$$

この置き換えにより次のようになります。

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_0 \cos(\omega_\Delta t) \cos(\omega_m t) & (19) \\ \varphi_2 = \varphi_0 \sin(\omega_\Delta t) \sin(\omega_m t) & (20) \end{cases}$$

この式を見ると、2つの振り子は位相が $\pi/2$ ずれた振動(角振動数 $\omega_m$ )で、振幅が周期 $T_\Delta = 2\pi/\omega_\Delta$ の長い周期で0から $\varphi_0$ の移り変わりを続けるということが分かります。 $(\omega_m > \omega_\Delta)$

通常、うなりの周期として振幅が最小から最小になる時間間隔を取ります。しかし、式からも分かる通り $\sin(\omega_\Delta t)$ の周期 $T_\Delta$ は振幅が $0 \rightarrow + \rightarrow 0 \rightarrow - \rightarrow 0$ なので、測定するうなりの周期の2倍になります。

この初期条件での $t-\varphi$ のグラフが図3です。この場合、振り子の長さが等しいのでエネルギー

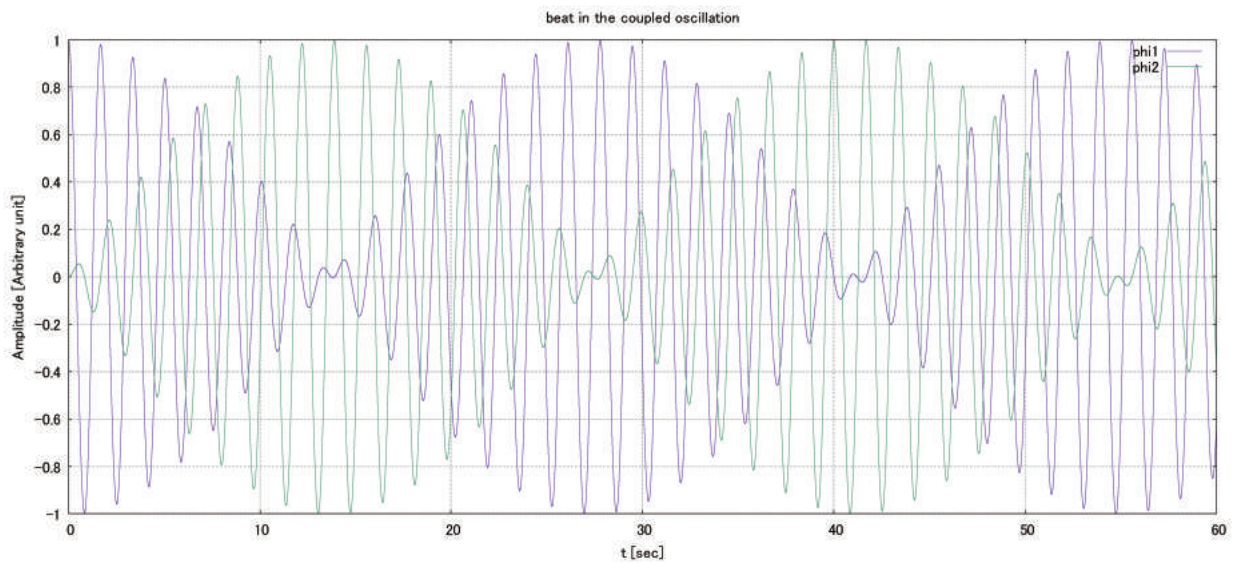


図3: 初期条件設定

が完全に行き来していることが分かります。

分かりやすいように図3に $\cos \omega_\Delta t, \sin \omega_\Delta t$ を重ねたものが図4です。

### 2.3.2 $x_2 = \frac{x_1}{2}$ の場合

ここでも「振り子の支柱はおもりに比べて非常に軽く、その質量を無視する」とします。

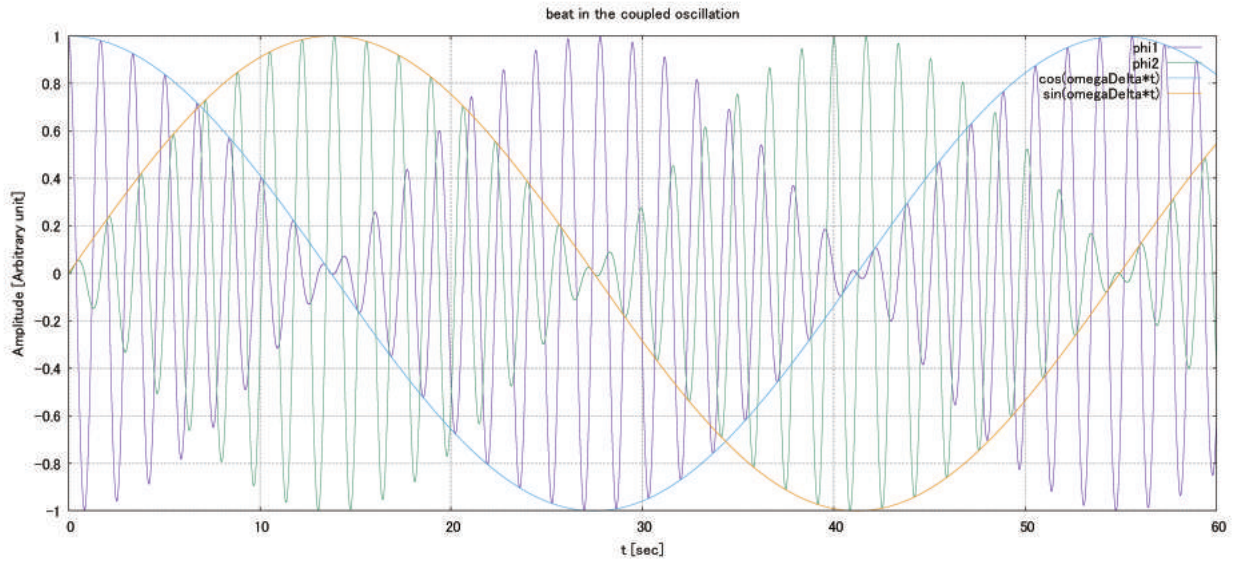


図 4: 初期条件設定 + うなり周期波形

こうすることで

$$\begin{aligned}x_{G1} &= x_1 \\x_{G2} &= x_2 = \frac{x_1}{2} \\I_2 &= M_1 \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 = \frac{I_1}{4}\end{aligned}$$

となります。

これにより  $\beta$  は次のようになります。<sup>\*4</sup>

$$\begin{aligned}\beta &= -\frac{1}{8} \frac{M_2}{k} \left(\frac{x_1}{L'}\right)^2 \left\{ \frac{g}{x_1} + 3 \frac{k}{M_2} \left(\frac{L'}{x_1}\right)^2 \mp \sqrt{\frac{g^2}{x_1^2} + 6 \frac{k}{M_2} \frac{g}{x_1} \left(\frac{L'}{x_1}\right)^2 + 25 \left(\frac{k}{M_2}\right)^2 \left(\frac{L'}{x_1}\right)^4} \right\} \\ &\equiv \beta_{\pm}\end{aligned}$$

これから角振動数は次のようになります。

$$\begin{aligned}\omega_+ &= \sqrt{\frac{5}{2} \left\{ \frac{g}{x_1} + \frac{k}{M_2} \left(\frac{L'}{x_1}\right)^2 \right\}} + \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{g}{x_1}\right)^2 + 6 \frac{k}{M_2} \frac{g}{x_1} \left(\frac{L'}{x_1}\right)^2 + 33 \left(\frac{k}{M_2}\right)^2 \left(\frac{L'}{x_1}\right)^4 \right\}} \\ \omega_- &= \sqrt{\frac{5}{2} \left\{ \frac{g}{x_1} + \frac{k}{M_2} \left(\frac{L'}{x_1}\right)^2 \right\}} - \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{g}{x_1}\right)^2 + 6 \frac{k}{M_2} \frac{g}{x_1} \left(\frac{L'}{x_1}\right)^2 + 33 \left(\frac{k}{M_2}\right)^2 \left(\frac{L'}{x_1}\right)^4 \right\}}\end{aligned}$$

<sup>\*4</sup>  $\beta$  の  $\pm$  と数式の符号が合致していませんが<sup>3</sup>, 式全体としての大小は  $\beta_{\pm}$  と合っています。



2.3.1 節で使ったパラメータを入れて  $\beta_{\pm}$  の大きさを見ます。

$$\begin{cases} \beta_+ = -0.2485 \\ \beta_- = -4.332 \end{cases}$$

この場合には，規準振動が同位相と逆位相という単純なものにはならないことが分かります。<sup>\*5</sup>

この規準振動の角振動数での  $t-\varphi$  グラフが図 5 です。

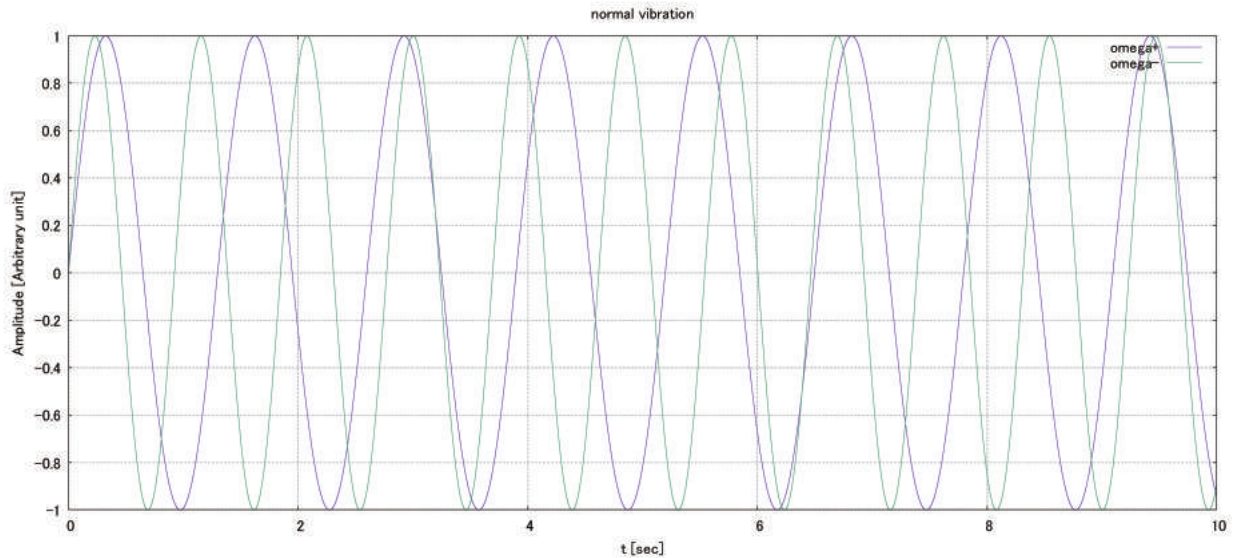


図 5:  $x_2 = \frac{x_1}{2}$  の振り子の規準振動

この条件での 2 つの振り子の一般的な連成振動は  $\omega, \beta$  を (8)(9) 式に代入するだけなので，割愛します。

### 3 ラグランジュの方程式

ここではラグランジュの方程式を使って，この系の解析をします。

この系では重力のポテンシャルとバネによるポテンシャルは時間にあらわに依存しないので，ラグランジアンは各振り子の運動エネルギーと，重力とバネのポテンシャルエネルギーの差として表されます（バネの質量は無視します）。

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \{ I_1' \dot{\varphi}_1^2 + I_2' \dot{\varphi}_2^2 \} \\ U &= M_2 g \{ x_{G1} (1 - \cos \varphi_1) + x_{G2} (1 - \cos \varphi_2) \} + \frac{1}{2} k L^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \\ &= M_2 g (x_{G1} \varphi_1^2 + x_{G2} \varphi_2^2) + \frac{1}{2} k L^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \end{aligned}$$

<sup>\*5</sup> くだいですが  $\beta_{\pm}$  は規準振動での  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  の比です。

ここで、 $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  の三次以上の項は微小量として落としています。

よってラグランジアン  $L$  は  $L = K - U$  なので、次のようになります。

$$L = \frac{1}{2} \{I_1' \dot{\varphi}_1^2 + I_2' \dot{\varphi}_2^2\} - M_2 g (x_{G1} \varphi_1^2 + x_{G2} \varphi_2^2) + \frac{kL'^2}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \quad (21)$$

ここで次の変数変換をします。

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{\varphi_1}{\sqrt{I_1'}} \\ \phi_2 = \frac{\varphi_2}{\sqrt{I_2'}} \end{cases} \quad (22)$$

よって

$$\begin{aligned} U &= M_2 g (x_{G1} \varphi_1^2 + x_{G2} \varphi_2^2) + \frac{kL'^2}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \\ &= M_2 g (I_1' x_{G1} \phi_1^2 + I_2' x_{G2} \phi_2^2) + \frac{kL'^2}{2} (\sqrt{I_1'} \phi_1 - \sqrt{I_2'} \phi_2)^2 \end{aligned}$$

(21) 式を上の変換後の変数を使い、行列で表現してみます。

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1' \left( M_2 g x_{G1} + \frac{kL'^2}{2} \right) & -\sqrt{I_1' I_2'} \frac{kL'^2}{2} \\ -\sqrt{I_1' I_2'} \frac{kL'^2}{2} & I_2' \left( M_2 g x_{G2} + \frac{kL'^2}{2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$(\phi_1 \phi_2)$  のベクトルに挟まれた  $2 \times 2$  行列は実対称行列であり、必ず対角化できます。対角化のために、この行列の固有値を計算します。この行列を  $A$  とし、固有値を  $\lambda$ 、単位行列 ( $2 \times 2$ ) を  $E$  とします。また、煩雑なので行列の要素を次のように置き換えます。

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} I_1' \left( M_2 g x_{G1} + \frac{kL'^2}{2} \right) & -\sqrt{I_1' I_2'} \frac{kL'^2}{2} \\ -\sqrt{I_1' I_2'} \frac{kL'^2}{2} & I_2' \left( M_2 g x_{G2} + \frac{kL'^2}{2} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

つまり

$$\begin{cases} a = I_1' \left( M_2 g x_{G1} + \frac{kL'^2}{2} \right) \\ b = \sqrt{I_1' I_2'} \frac{kL'^2}{2} \\ c = I_2' \left( M_2 g x_{G2} + \frac{kL'^2}{2} \right) \end{cases}$$

です。

これに伴って、 $\phi_1, \phi_2$  について、新しい変数  $\Phi_1, \Phi_2$  を次のように定義します。

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

ここで  $T$  は  $A$  を対角化する実行列であり、 ${}^tT$  は  $T$  の転置行列です。  
よって (23) 式は次のように書けます。

$$L = \frac{1}{2} (\Phi_1 \quad \Phi_2) {}^tT T \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} - (\Phi_1 \quad \Phi_2) {}^tT A T \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$T$  を求めるために、行列  $A$  の固有値を求めます。永年方程式は次のとおりです。

$$\begin{aligned} 0 &= |A - \lambda E| \\ &= \begin{vmatrix} a - \lambda & -b \\ -b & c - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 \end{aligned} \quad (26)$$

よって

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \left\{ (a + c) \pm \sqrt{(a + c)^2 + 4(b^2 - ac)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (a + c) \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[ I_1' \left( M_2 g x_{G1} + \frac{kL^2}{2} \right) + I_2' \left( M_2 g x_{G2} + \frac{kL^2}{2} \right) \pm \sqrt{\left\{ I_1' \left( M_2 g x_{G1} + \frac{kL^2}{2} \right) - I_2' \left( M_2 g x_{G2} + \frac{kL^2}{2} \right) \right\}^2 + I_1' I_2' k^2 L^4} \right] \\ &\equiv \lambda_{\pm} \end{aligned}$$

これから、固有値  $\lambda_{\pm}$  は実数であることも分かります。<sup>\*6</sup>

$\lambda_{\pm}$  に属する固有ベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は定義より、次のように求まります。

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & -b \\ -b & c - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

(26) 式に注意してこれを解くと  $k_{\pm}$  を任意定数として、それぞれの固有値に対する固有ベクトルは

$$\begin{cases} \lambda_+ \rightarrow k_+ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a - \lambda_+}{b} \end{pmatrix} \\ \lambda_- \rightarrow k_- \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a - \lambda_-}{b} \end{pmatrix} \end{cases}$$

となります。

<sup>\*6</sup> あとの計算のため書き下しているだけで、2x2の実行列が固有値を持つ場合には、その固有値は必ず実数で2つ（重根は2つと数える）であることが線形代数で分かっています。

2つの固有ベクトルが直交していることは、内積を見ると分かります。行列部分だけ計算すれば良いので、

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & \frac{a-\lambda_-}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a-\lambda_+}{b} \end{pmatrix} &= 1 + \frac{(a-\lambda_-)(a-\lambda_+)}{b^2} \\
 &= 1 + \frac{1}{b^2} \{a^2 - a(\lambda_+ + \lambda_-) + \lambda_+ \lambda_-\} \\
 &= 1 + \frac{1}{b^2} \left[ a^2 - a(a+c) + \frac{1}{4} \{ (a+c)^2 - (a-c)^2 - 4b^2 \} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{27}$$

と内積が0なので直交していることが分かります。

固有ベクトルを正規化するために  $k_{\pm}$  を次のように定義します。

$$k_{\pm} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + (a - \lambda_{\pm})^2}} \tag{28}$$

行列  $A$  を変換する行列  $T$  は固有ベクトルを2つ並べたものなので

$$T = \begin{pmatrix} k_+ & k_- \\ k_+ \frac{a-\lambda_+}{b} & k_- \frac{a-\lambda_-}{b} \end{pmatrix}$$

となります。

また  $T$  の転置行列  ${}^tT$  は

$${}^tT = \begin{pmatrix} k_+ & k_+ \frac{a-\lambda_+}{b} \\ k_- & k_- \frac{a-\lambda_-}{b} \end{pmatrix}$$

です。

(27) (28) 式に注意して、実際に  ${}^tTT$  を計算してみます。

$$\begin{aligned}
 {}^tTT &= \begin{pmatrix} k_+ & k_+ \frac{a-\lambda_+}{b} \\ k_- & k_- \frac{a-\lambda_-}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_+ & k_- \\ k_+ \frac{a-\lambda_+}{b} & k_- \frac{a-\lambda_-}{b} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} k_+^2 \left( 1 + \frac{(a-\lambda_+)^2}{b^2} \right) & 0 \\ 0 & k_-^2 \left( 1 + \frac{(a-\lambda_-)^2}{b^2} \right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

このように単位行列となることが分かります。

同様に  ${}^tTAT$  は次のようになります。

$$\begin{aligned}
 {}^tTAT &= \begin{pmatrix} k_+ & k_+ \frac{a-\lambda_+}{b} \\ k_- & k_- \frac{a-\lambda_-}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_+ & k_- \\ k_+ \frac{a-\lambda_+}{b} & k_- \frac{a-\lambda_-}{b} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} k_+^2 \left[ \lambda_+ + \frac{1}{b^2} \{ (a-\lambda_+)c - b^2 \} (a-\lambda_+) \right] & k_+ k_- \left[ \lambda_+ + \frac{1}{b^2} \{ (a-\lambda_+)c - b^2 \} (a-\lambda_-) \right] \\ k_+ k_- \left[ \lambda_- + \frac{1}{b^2} \{ (a-\lambda_-)c - b^2 \} (a-\lambda_+) \right] & k_-^2 \left[ \lambda_- + \frac{1}{b^2} \{ (a-\lambda_-)c - b^2 \} (a-\lambda_-) \right] \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{29}$$

ここで式変形に (26)(27) 式を使っています。確かに (29) 式が対角化されて、対角成分が固有値  $\lambda_{\pm}$  になることが分かります。

よって (25) 式は次のようになります。

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\Phi}_1^2 + \dot{\Phi}_2^2) - (\lambda_+ \Phi_1^2 + \lambda_- \Phi_2^2)$$

これが  $\Phi_1, \Phi_2$  について単振動の式となっているのはすぐに分かりますが、念の為ラグランジアン  $L$  を使い運動方程式を出すと

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \Phi_1} &= \ddot{\Phi}_1 + 2\lambda_+ \Phi_1 = 0 \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \Phi_2} &= \ddot{\Phi}_2 + 2\lambda_- \Phi_2 = 0
 \end{aligned}$$

であり、解は  $\sqrt{2\lambda_{\pm}}$  を角振動数とする単振動です。

この単振動を元のそれぞれの振り子の変位に直せば、次のようになります。(22)(24) 式から

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} &= {}^tT \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} k_+ & k_+ \frac{a-\lambda_+}{b} \\ k_- & k_- \frac{a-\lambda_-}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\phi_1}{\sqrt{I_1'}} \\ \frac{\phi_2}{\sqrt{I_2'}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{k_+}{\sqrt{I_1'}} \left( \phi_1 + \frac{a-\lambda_+}{b} \phi_2 \right) \\ \frac{k_-}{\sqrt{I_2'}} \left( \phi_1 + \frac{a-\lambda_-}{b} \phi_2 \right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

もともとの変位  $\phi_1, \phi_2$  にかかっている係数は時間依存しないので  $\phi_1, \phi_2$  の比は時間によらず一定となります。

---

ラグランジュの式で単振動の角振動数であった  $\sqrt{2\lambda_{\pm}}$  がそれぞれ (6)(7) 式と一致していること、そこから導かれるもともとの振り子の変位の比が一定で (5) 式と一致することから、2.2 節で天下的に使った「一般の連成振動は規準振動の重ね合わせで表現できる」はラグランジュの方程式から言えることが分かります。

具体的な例を当てはめて確認することは 2.3 節で行っているので略します。