

目的

両端を下から支えられた平らな梁の外力による変形を測定し、梁材料のヤング率を求めること。

まとめ

水平に保持された平らな梁の外力によるたわみ変形への抵抗力は、変形量が梁の長さよりはるかに小さい場合、数学的に計算することができます。この場合、梁の変形は梁を構成する材料のヤング率 E に比例します。この実験では既知の力による梁の変形を測定し、その結果を使ってスチールとアルミニウムのヤング率を求めます。

必要機器

品番	品名	数量
U8557260	ヤング率測定実験器	1
U8557270	ヤング率測定実験拡張セット	1
U10073	ポケット巻尺・2m	1
U10070	外側マイクロメーター	1

基本原理

平らで水平に保たれた梁の外力によるたわみ変形への抵抗力は、変形の程度が梁の長さよりはるかに小さい場合、曲げモーメントを使って数学的に計算することができます。以下の計算から分かるように、変形は梁材料のヤング率 E に比例します。そのため、既知の力による梁の変形測定から材料のヤング率が求められます。

(計算詳細については別紙「Appendix: 梁のたわみの計算」を参照してください。)

応力の計算をする際は、梁を部材軸に平行に薄切りしたセグメントに分割します。これらのセグメントは、梁のたわみにより、たわんだ内側で圧縮され、外側では引き延ばされます。よって、部材軸 (= 中央部分) に対して外側は引張、内側は圧縮されます。一方、部材軸部分のセグメントは圧縮や引張をしません。セグメントの引張や圧縮によるひずみ ϵ と圧縮や引張に伴う応力 σ は、中央部分のセグメントからの距離 z に依存します。(図1)

$$(1) \quad \epsilon(z) = \frac{\Delta s(z)}{s(z)} = \frac{z}{\rho(z)}$$

$\rho(x)$: たわみによる局所的な曲率半径
また、フックの法則より

$$\sigma(z) = E \cdot \epsilon(z)$$

$\sigma(x)$: 応力, E: 材料のヤング率

このたわみによる応力は部材軸に垂直な面を回転させようとする力のモーメント、曲げモーメントとして計算できます。(図2)

$$(2) \quad M(x) = \int \sigma(z) \cdot z \cdot dA = \frac{E \cdot I}{\rho(x)}$$

ここで $I = \int_A z^2 \cdot dA$ は、断面の慣性モーメントを表します。

この実験では曲率半径 $\rho(x)$ は直接測定せずに圧縮や引張をしない中央部分セグメントの z 方向への変位 $w(x)$ を測定します。セグメントの変形による変位 $w(x)$ の変化 $dw(x)/dx$ が梁の長さ L に比べ充分小さい場合には、 $w(x)$ と $M(x)$ は次の式で結ばれます。

$$(3) \quad \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{E \cdot I}$$

これから、 $M(x)$ が決定できれば $w(x)$ は2階の微分方程式を解くことで求められます。

両端で支持され下向きの力 F が点 a で作用している、長さ L の梁について調べます。平衡状態では、梁に作用する全ての力の総和はゼロになります。

$$(4) \quad F_1 + F_2 - F = 0$$

同様に、梁に作用するすべての力のモーメントの総和もゼロになります。

$$(5) \quad F_2 \cdot L - F \cdot a = 0$$

梁の両端では変位0かつ曲率0なので、 $M(0) = M(L) = 0$ および $w(0) = w(L) = 0$ となります。これから $M(x)$ が決定できます。

$$(6) \quad M(\zeta) = \begin{cases} F \cdot L \cdot (1 - \alpha) \cdot \zeta & ; \zeta \leq \alpha \\ F \cdot L \cdot \alpha \cdot (1 - \zeta) & ; \zeta > \alpha \end{cases}$$

ここで $0 \leq \alpha = \frac{a}{L} \leq 1$, $0 \leq \zeta = \frac{x}{L} \leq 1$ です。

よって変位 $w(x)$ は(3)より次のように求められます。

$$(7) \quad w(\zeta) = \begin{cases} \frac{F \cdot L^3}{E \cdot I} \cdot \left[\left(\frac{1 - \alpha}{6} \right) \cdot \zeta^3 - \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{3} \right) \cdot \zeta \right] & ; \zeta \leq \alpha \\ \frac{F \cdot L^3}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{\alpha^3}{6} - \left(\frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha}{3} \right) \cdot \zeta + \frac{\alpha}{2} \cdot \zeta^2 - \frac{\alpha}{6} \cdot \zeta^3 \right] & ; \zeta > \alpha \end{cases}$$

実験は次の手順で行います。

- ・梁の中央 ($\zeta = 0.5$) に荷重を加えた場合と、中央以外 ($\zeta < 0.5$) に荷重を加えた場合とで計測し、計算との検証を行います。
- ・フックの法則が成り立っていることを、梁の中央に荷重を加えて変位最大値と荷重の大きさが比例していることを確かめます。
- ・変位が $(L/d)^3$ に比例することを、様々な形状の梁を使って確認します。
- ・梁の変位と荷重からそれぞれのヤング率を計算し、文献値と比較・検証します。

評価

梁の中央に荷重を加えた場合には

$$(8) \quad w\left(x = \frac{L}{2}, a = \frac{L}{2}\right) = -\frac{F \cdot L^3}{48E \cdot I}$$

梁が幅 b 、厚さ d の場合、断面二次モーメントは以下のようになります。

$$I = \int_A z^2 \cdot dA = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z^2 \cdot b \cdot dz = \frac{d^3}{12} \cdot b$$

これから(8)は次のようになります。

$$w\left(x = \frac{L}{2}, a = \frac{L}{2}\right) = -\frac{F \cdot L^3}{4E \cdot d^3 \cdot b}$$

参考) ヤング率 (理科年表から抜粋)

鉄(鋼) = $20.1 \sim 21.6 \times 10^{10}$ Pa
アルミニウム = 7.03×10^{10} Pa

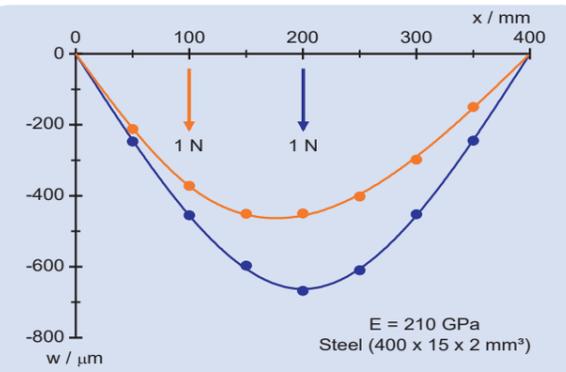


図3: 梁の中央と中央以外に荷重を加えた場合の変位 $w(x)$ (測定値と計算値の比較)

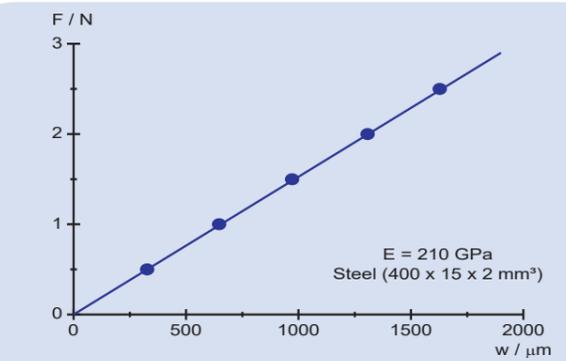


図4: スチールでのフックの法則の検証 (中央に荷重をかけたときの変位最大値と荷重の関係)

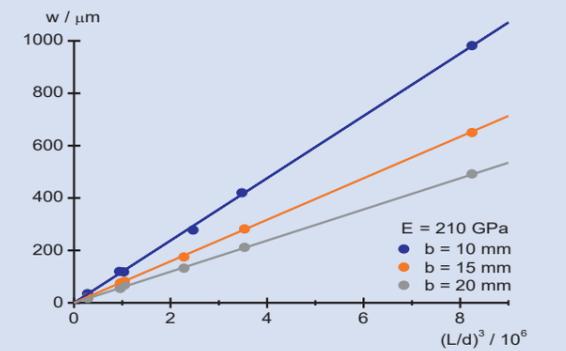


図5: $w(x)$ と $(L/d)^3$ の関係 (荷重 1 N を梁中央にかけた場合の変位最大値)

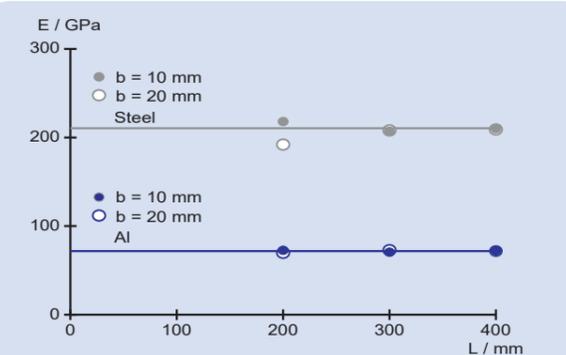


図6: スチールとアルミニウムのヤング率 (測定値と文献値の比較)

応用実験

- 仕様は予告なく変更されることがあります。
- 品番・製品名をクリックすると製品仕様ページ (外部サイト) が開きます。