力学 / 固体の変形

UE1090200　　平らなはりのたわみ

Appendix：梁のたわみの計算

目的

　梁の外力によるたわみを外力と働く位置の関数として導出すること。

　まず始めに外力が加わっていない状態, つまり均一な密度の材料でできた断面積一定の梁の平衡状態を見ます（図 1)。

　当然，重心は中点にあり，力の釣り合い条件から次の 2 式が成り立っています。

$$F_{01} + F_{02} - F_g = 0$$

$$-F_{01} \cdot L + F_g \cdot \frac{L}{2} = 0$$

（これから F_{01} と F_{02} は決定できますが，後の計算では不要なので書きません。）

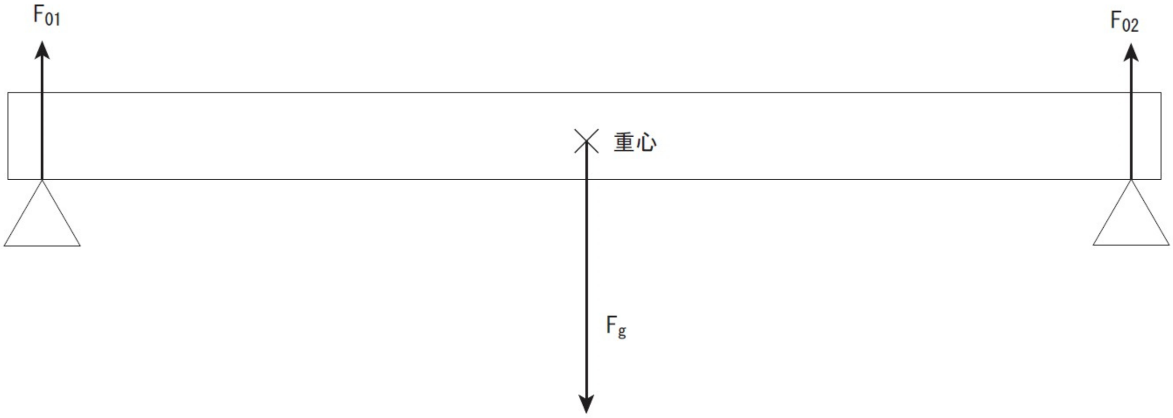


図 1：両端支持（単純支持）の均一な梁に外負荷がかかっていない状態

　剛体とは扱えない梁の変形を議論する上で必要となる曲げモーメントを導入します。曲げモーメントは梁などの構造強度を計算する際に必須となります。

　今，梁のたわみによる変形を w(x)とします。また，たわみの微小部分に注目すると円弧になっていると見なせます。この時の円弧の半径を局所半径 ρ(x)と言います。ρ(x)は梁の部分部分によって異なるであろう事から位置 x の関数となります。（図 2 参照）

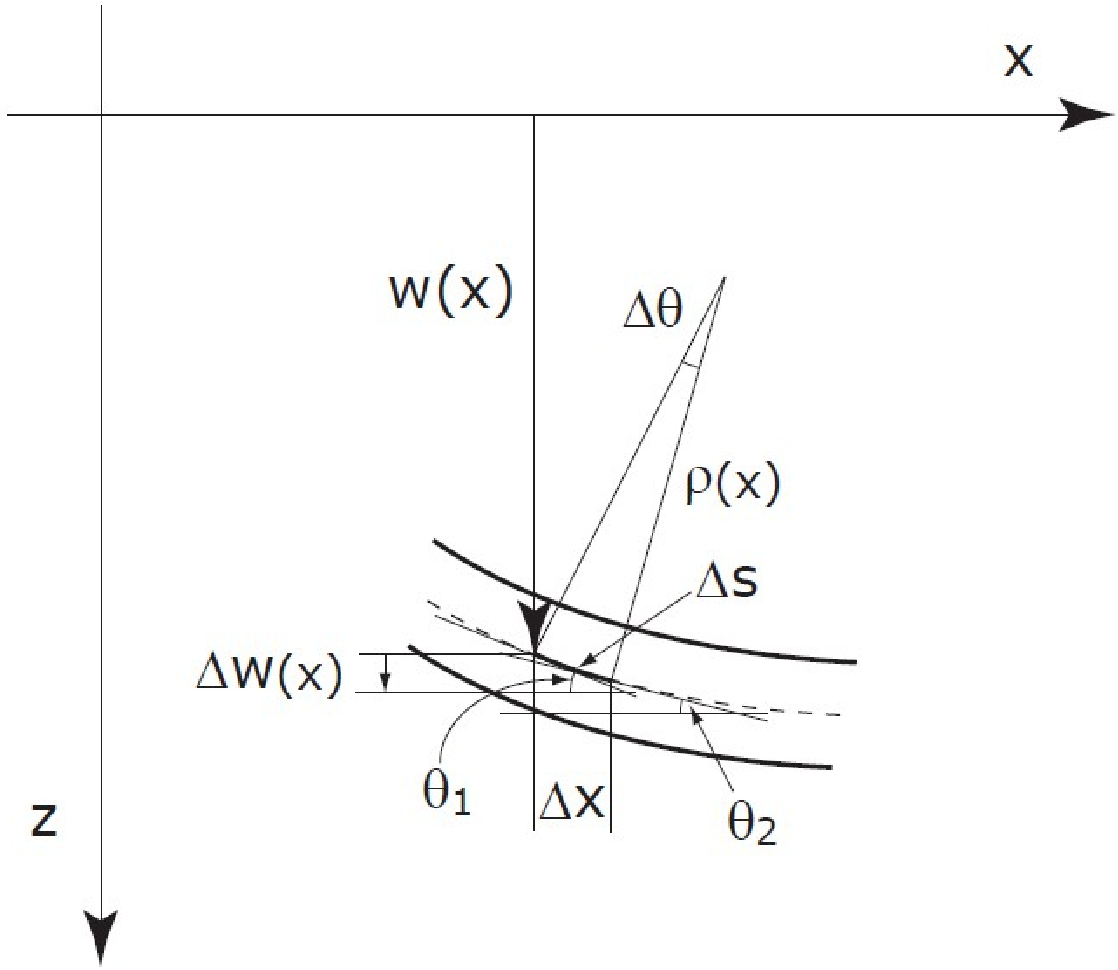


図 2：たわみ変形 w(x)と局所半径 ρ (x)の図示（w(x)と ρ (x)の関係），ここで点線は部材軸（＝中央部分）

まずはじめは w(x)と ρ(x)の関係を導くことを考えます。次に曲げモーメントを位置 x の関数として表わし，フックの法則を使って最終的に w(x)の関数形を決定する（たわみ曲線の決定）という道筋です。

ですので，記述が少し長くなります。

変形（たわみ）が梁の長さに対して十分小さく，次の仮定が成り立つものとします。

① 変形後も、部材軸に直角な断面は直角なままである（平面角保持の仮定）
② 変形後も断面の形状は変化しない
③ 変形による変位は微小である

これらの仮定の下では，変形による微小円弧の長さ Δs(x)は

(1) $$\Delta s(x) = \rho(x) \cdot \Delta\theta$$

となり，また，図２から明らかなように次のようにも表せます。

(2) $$\Delta s(x)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta w(x)^2}=\sqrt{\left(1+\left(\frac{\Delta w(x)}{\Delta x}\right)^2\right)}\cdot\Delta x$$

一方，Δθ は次のように分かります。

$$\tan\theta_1=\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{x}=\mathrm{a})}{\mathrm{dx}}=\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{a})}{\mathrm{dx}}\quad（と表記します）$$

$$\tan\theta_2=\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{x}=\mathrm{b})}{\mathrm{dx}}=\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{b})}{\mathrm{dx}}\quad（と表記します）$$

から

$$\therefore\tan(\theta_2-\theta_1)=\tan\Delta\theta=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2}=\frac{\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{a})}{\mathrm{dx}}-\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{b})}{\mathrm{dx}}}{1+\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{a})}{\mathrm{dx}}\cdot\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{b})}{\mathrm{dx}}}$$

ここで Δθ が十分小さいとすると

$$\tan\Delta\theta\sim\Delta\theta$$

(1)式から 1/ρ を計算すると

$$\frac{1}{\rho(\mathrm{x})}=\frac{\Delta\theta}{\Delta \mathrm{s}}=\frac{\dfrac{\frac{\mathrm{dw}(b)}{\mathrm{dx}}-\frac{\mathrm{dw}(a)}{\mathrm{dx}}}{1+\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{a})}{\mathrm{dx}}\cdot\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{b})}{\mathrm{dx}}}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)^2\right)}\cdot\Delta x}$$

局所半径 ρ(x)は Δs→0 の極限を取ることで決定され，それは Δx→0 の極限を取ることと同じなので

$$\frac{1}{\rho(\mathrm{x})}=\lim_{\Delta\mathrm{x}\to0}\frac{\dfrac{\frac{\mathrm{dw}(b)}{\mathrm{dx}}-\frac{\mathrm{dw}(a)}{\mathrm{dx}}}{1+\frac{\mathrm{dw}(b)}{\mathrm{dx}}\cdot\frac{\mathrm{dw}(a)}{\mathrm{dx}}}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)^2\right)}\cdot\Delta x}$$

また Δx→0 の極限では b→a とも同じ（∵b=a+Δx）なので

$$\therefore\lim_{\Delta\mathrm{x}\to0}\frac{\dfrac{\frac{\mathrm{dw}(b)}{\mathrm{dx}}-\frac{\mathrm{dw}(a)}{\mathrm{dx}}}{1+\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{a})}{\mathrm{dx}}\cdot\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{b})}{\mathrm{dx}}}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)^2\right)}\cdot\Delta x}=\lim_{\Delta\mathrm{x}\to0}\frac{\dfrac{\frac{\mathrm{dw}(a+\Delta x)}{\mathrm{dx}}-\frac{\mathrm{dw}(a)}{\mathrm{dx}}}{1+\frac{\mathrm{dw}(\mathrm{a}+\Delta\mathrm{x})}{\mathrm{dx}}\cdot\frac{\mathrm{dw}(a)}{\mathrm{dx}}}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dw}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)}\cdot\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta\mathrm{x}\to0}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{dw}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\frac{\mathrm{dw}(a+\Delta x)}{\mathrm{dx}}-\frac{\mathrm{dw}(a)}{\mathrm{dx}}}{\Delta\mathrm{x}}=\left(1+\left(\frac{dw}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{d^2w}{dx^2}$$

ここで $\dfrac{\mathrm{dw}(\mathrm{a}+\Delta\mathrm{x})}{\mathrm{dx}}=\dfrac{\mathrm{dw}(a)}{\mathrm{dx}}$ を使っています。

$$\therefore \frac{1}{\rho(\mathrm{x})} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dw}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

局所半径 ρ の逆数を曲率と言います。ρ と w の関係は一般的に成り立つものです。

次に曲率 ρ とひずみ ε の関係を見ます。

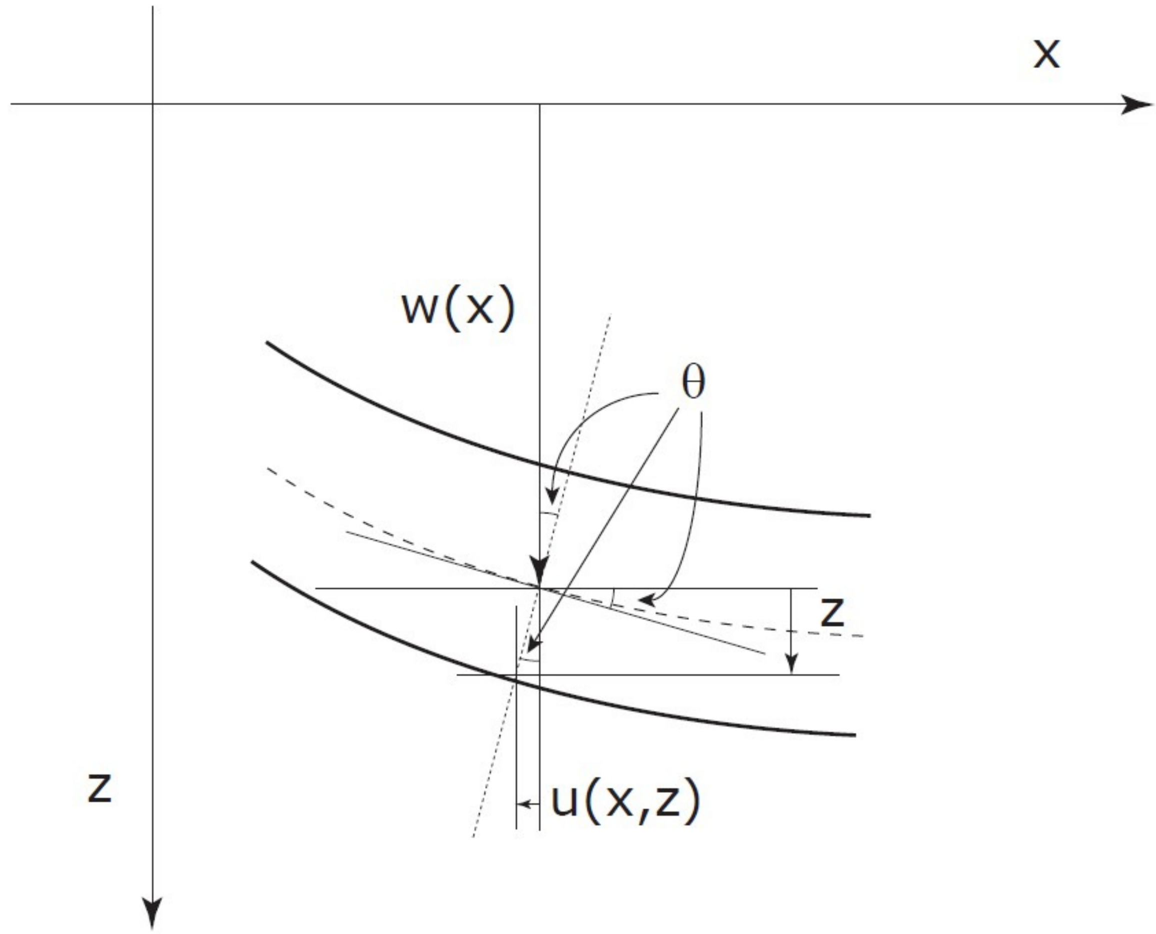


図 3 : x 方向変位 u(x,z)と w(x)の図示（曲率 ρ とひずみ ε の関係），ここで点線は部材軸（＝中央部分）

図 3 のように x 方向の変位（ひずみが単位長さあたりの変化量であるのに対し，これは x 方向の変化量そのままです。）を u(x,z)とすると，u(x,z)は z と w(x)の傾きを使って次のように書けます。

$$u(x,z) = -z \cdot \sin\theta = -z \cdot \frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = -z \cdot \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = -z \cdot \frac{\frac{dw(x)}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2}}$$

$$\because \tan\theta = \frac{dw(x)}{dx}$$

u(x,z)が(x,z)での変位なのでひずみ ε は u(x,z)を単位長さで割る，すなわち u(x,z)を x で微分したものに当たります。

$$\therefore \epsilon(x,z) = \frac{du(x,z)}{dx} = -z \cdot \frac{\frac{d^2w(x)}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -z \cdot \frac{1}{\rho(x)}$$

フックの法則から材料のヤング率を E とすると応力 σ とひずみ ε は次式で結ばれます。

$$\sigma(x,z) = E \cdot \epsilon(x,z)$$

$$\therefore \sigma(x,z) = -E \cdot \frac{z}{\rho(x)}$$

曲げモーメントは考えている物体各部分での仮想切断面中心軸からの力のモーメントを足しあわせたものです。（図 4 参照）

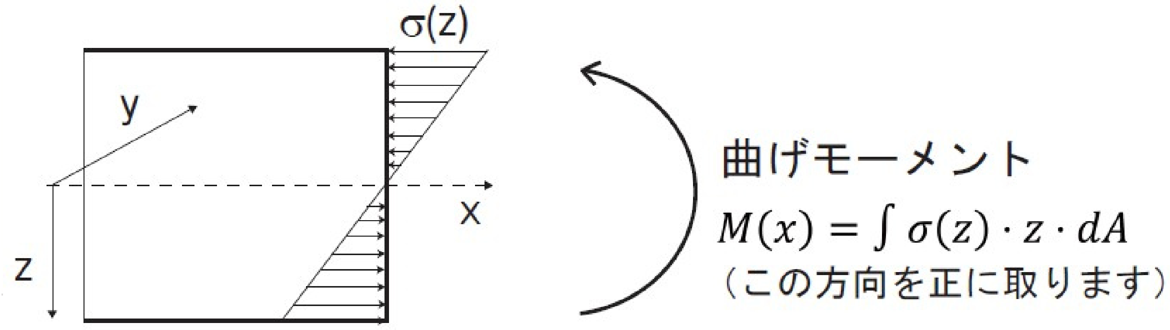


図 4：曲げモーメントの概念図

物質各部分内部で仮想切断面に働く「面を回転させる力のモーメント」になり，足し合わせ（積分）は次式となります。

$$M(x) = \int_A \sigma(x,z) \cdot z \cdot dA = -\int_A \frac{E \cdot z^2}{\rho(x)} \cdot dA = -\frac{E}{\rho(x)} \cdot \int_A z^2 \cdot dA = -\frac{E \cdot I}{\rho(x)}$$

ここで M(x)：位置 x での曲げモーメント，I：$I = \int_A z^2 \cdot dA$（断面二次モーメント），A：考えている仮想切断面，よって dA＝dydz

w(x)が十分小さいので w(x)の変化率も小さく⑸式から dw(x)/dx の二乗以上の項を消すと（分母を

テイラー展開して確かめてください。)，次の式が得られます。

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2}=\frac{1}{\rho(x)}=-\frac{M(x)}{E\cdot I}$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2w(x)}{dx^2}=-\frac{M(x)}{E\cdot I}}$$

これが求めたかった梁の変形（たわみ）と曲げモーメントの直接的な関係式（たわみ曲線微分方程式）となり，これを解くことで w(x)の具体的な形が分かります。

本実験では変位の測定値が負値となるので，w(x)→-w(x)と変換し，その結果本実験でのたわみ曲線微分方程式は次のようになります。

$$\boldsymbol{\frac{d^2w(x)}{dx^2}=\frac{M(x)}{E\cdot I}}$$

外力が働いていない状態＝自重の負荷分布によるたわみが発生している状態の検討に戻ります。

この時，梁はたわみによる曲げモーメントと重力・端点での反力が釣り合っています。これを添え字 0 を付けて書けば，梁上の任意の位置 x で

$$M_0(x)-F_{01}\cdot x+\frac{m\cdot g\cdot x}{L}\cdot\frac{x}{2}=0$$

（仮想断面の左側を考えて式を立てています。）

実験では外力が働いた場合の変形を測定することと, 各仮想切断面でのモーメントは足し合わせが成り立つことから，一様な負荷分布によるたわみ変形を 0 とし，それに合わせて M_0(x)も 0 と式の上から消します。

これ以降は質量のない梁に外力を加えた場合の式となります。

注記）

因みに一様な負荷分布によるたわみ変形は下記の式となります。（単純な微分方程式を解くだけです。）

$$w(x)=\frac{m\cdot g\cdot L^3}{24E\cdot I}\cdot(\zeta^4-2\zeta^2+\zeta)$$

ここで m は梁の質量，ζ=x/L です。

注記終わり）

外力を梁の左端から a の位置に加えた場合，次の 2 式が成り立ちます。

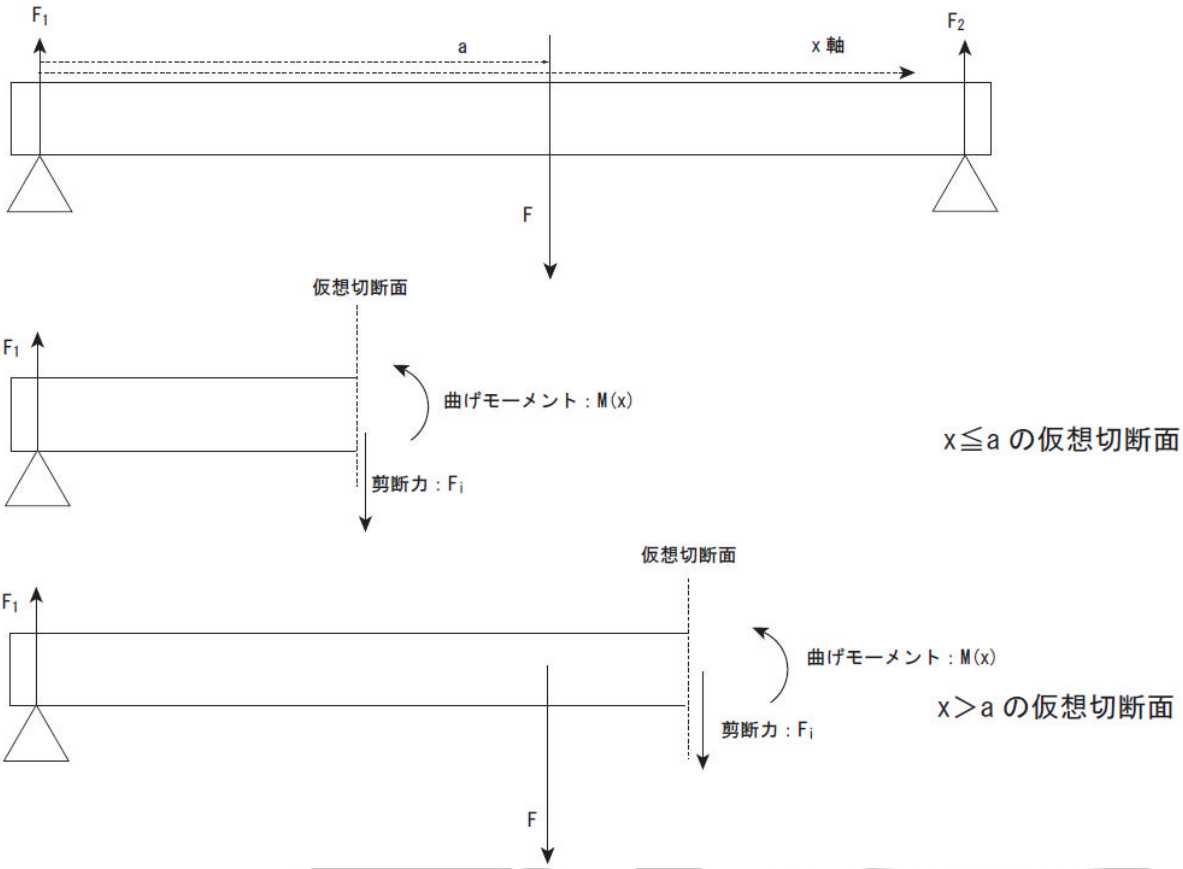
・力の釣り合い条件

$$F_1+F_2-F=0$$

・梁の力のモーメント釣り合い条件

$$F_2\cdot L-F\cdot a=0$$

曲げモーメントは点 a の左右でそれぞれ仮想切断面での釣り合いを考えると良いでしょう。



x ≦a で仮想切断面を考え剪断力を F_i と書けば，力の釣り合いと力のモーメントの釣り合いから

$$F_1 = F_i = F \cdot \left(1 - \frac{a}{L}\right)$$

$$-F_i \cdot x + M(x) = 0$$

$$\therefore M(x) = F \cdot \left(1 - \frac{a}{L}\right) \cdot x$$

x＞a での仮想切断面を考えれば

$$F_i = F_1 - F = -F \cdot \frac{a}{L}$$

$$-F_1 \cdot x + F \cdot (a - x) + M(x) = 0$$

$$\therefore M(x) = F \cdot a \cdot (1 - \frac{x}{L})$$

位置 x を梁の長さ L で規格化すると M(x)の表式は次のようになります。

$$M(\zeta) = \begin{cases} F \cdot L \cdot (1-\alpha) \cdot \zeta & : \zeta \le \alpha \\ F \cdot L \cdot \alpha \cdot (1-\zeta) & : \zeta > \alpha \end{cases}$$

ここで，$0 \le \alpha = \frac{a}{L} \le 1$，$0 \le \zeta = \frac{x}{L} \le 1$ です。

M の表式が分かったので変位 w も計算できます。

但し，a 点の左右で別々の 2 階微分方程式なので，w(0)=w(L)=0 と左右の微分方程式から得られた w が a 点で滑らかに接続する（$w_{左}(a)=w_{右}(a)$と $dw_{左}(a)/dx=dw_{右}(a)/dx$，たわみ角が等しい）という境界条件の元で未定定数が決定されます。

dx=L・dζ に注意して計算すれば次の解が得られます。

$$w(\zeta)=\begin{cases}\dfrac{F\cdot L^3}{E\cdot I}\cdot\left[\left(\dfrac{(1-\alpha)}{6}\right)\cdot\zeta^3-\left(\dfrac{\alpha^3}{6}-\dfrac{\alpha^2}{2}+\dfrac{\alpha}{3}\right)\cdot\zeta\right] & :\zeta\le\alpha\\ \dfrac{F\cdot L^3}{E\cdot I}\cdot\left[\dfrac{\alpha^3}{6}-\left(\dfrac{\alpha^3}{6}+\dfrac{\alpha}{3}\right)\cdot\zeta+\dfrac{\alpha}{2}\cdot\zeta^2-\dfrac{\alpha}{6}\cdot\zeta^3\right] & :\zeta>\alpha\end{cases}$$

上式から同じ大きさの負荷を色々な位置に加えたときの w(ζ)（たわみ曲線といいます）をグラフで示します。