

セット番号 UE1090300 円柱形ロッドのねじり変型

力学 / 固体の変形

Appendix : 付加錘の力学的扱い

目的

実験解析では付加錘を中心に質量が集中したという扱いをした。この取り扱いの妥当性と互いの180°位置に2つの錘を置く意味を考察すること。

付加錘は互いに180°位置に置かれます。錘は円柱形なので中心からの質量分布が対称になっています。その為、質量が中心（重心）に集中しているとしてサンプル全体の慣性モーメントを計算しても十分な精度を持ちます。

付加錘は円柱形なので半径 r_1 、高さ h 、質量 m_1 とします。円柱の軸を回転軸とすると重心を通り、その時の慣性モーメントは定義から

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} (\rho \cdot r \cdot d\theta \cdot dr) \cdot r^2 \cdot dh = \rho \cdot h \cdot 2\pi \cdot \int_0^{r_1} r^3 \cdot dr = \frac{1}{2} \cdot ((\rho \cdot h \cdot (\pi \cdot r_1^2))) \cdot r_1^2$$

ここで ρ を円柱体の密度（一定）とします。よって ρ を円柱体の質量 m_1 を使って書き直せば

$$I_G = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r_1^2$$

となります。

回転ディスクの半径が円柱形付加錘の中心位置なので、これを R とすれば平行軸の定理より回転ディスク中心で回転するときの付加錘の慣性モーメントは

$$I = m_1 \cdot R^2 + I_G = m_1 \cdot R^2 + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r_1^2 = m_1 \cdot R^2 \cdot (1 + \frac{r_1^2}{2R^2})$$

実験器寸法は $R=10\text{cm}$, $r_1=1.2\text{cm}$ なので $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r_1}{R}\right)^2 = 0.0072$ と括弧内第二項を無視しても精度としては問題ありません。

この時の慣性モーメント I_1 は、サンプル下部（自由端側）に付いている回転ディスクの半径を R とすれば、

$$I_1 = I_0 + 2m \cdot R^2$$

となります。

評価

(9) 式より付加錘の有無で振動周期 T は次のようになります。

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0}{D}}$$

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_1}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + 2m \cdot R^2}{D}}$$

よって上二式から I_0 を消せば、

$$D = 4\pi^2 \cdot \frac{2m \cdot R^2}{T_1^2 - T_0^2}$$

と計算できる事が分かります。

せん断弾性係数 G （理科年表から抜粋）

鉄（鋼） $7.8-8.4 \times 10^{10} \text{Pa}$

真鍮 $3.73 \times 10^{10} \text{Pa}$

銅 $4.83 \times 10^{10} \text{Pa}$

アルミニウム $2.61 \times 10^{10} \text{Pa}$