

セット番号:UE2060300 ヒートポンプ
応用実験

熱力学/熱サイクル

Appendix : エントロピー原理によるヒートポンプ効率の検討

目的

モリエル図によるエンタルピーを用いた効率計算ではなく、エントロピー原理から効率を考えること。

2つの水槽（熱溜）も含めて一つの系と見なすと、始動前の状態と電源を切った後はそれぞれ熱平衡にあり、温度各 T_i と系を記述する各変数の組（今、アルファベット大文字の X, Y, Z でそれぞれ表わす）で記述される、下記のような系全体として断熱変化が外部からの仕事（電気エネルギー）により起こったと考えることができます。

$$\{U(T_r; X)|U(T_L; Y)|U(T_H; Z)\} \rightarrow^A \{U(T_r; X)|U(T'_L; Y)|U(T'_H; Z)\}$$

ここで”|”は境界壁を表わし、物質の出入りが無いことを示します。また熱サイクルですから始動前と終了後で作業物質の状態は同じ（温度やその他の変数全て）であり、変化は熱溜にのみ残ります。この場合は温度だけが変わったと見なします。

系の内部エネルギー変化 ΔU は次の式になります。

$$\begin{aligned}\Delta U &= U(T_L; Y) - U(T'_L; Y) - (U(T'_H; Z) - U(T_H; Z)) \\ &= Q_L - Q_H \\ &= -W\end{aligned}$$

ここで Q_L, Q_H, W は全て正 (>0) であり、 W は電力による仕事（圧縮機の仕事）になります。

断熱系でエントロピーが減少することはない事から、系全体の一部である低温側・高温側熱溜の量を添え字を用いて表わせれば、次の式が成り立ちます。

$$S((T_r; X)|(T_L; Y)|(T_H; Z)) \leq S((T_r; X)|(T'_L; Y)|(T'_H; Z))$$

エントロピーは示量性であり、加法性を持つことから上式は

$$\begin{aligned}S(T_L; Y) + S(T_H; Z) &\leq S(T'_L; Y) + S(T'_H; Z) \\ \therefore S(T_H; Z) - S(T'_H; Z) &\leq S(T'_L; Y) - S(T_L; Y)\end{aligned}$$

エントロピーの差は次のように計算できます。（例として左辺・高温側の計算を示します。）

$$\begin{aligned}S(T_H; Z) - S(T'_H; Z) &= \int_{T'_H}^{T_H} dT \cdot \frac{\partial S(T; Z)}{\partial T} = \int_{T'_H}^{T_H} dT \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial U(T; Z)}{\partial T} \\ &\geq \frac{1}{T'_H} \cdot \int_{T'_H}^{T_H} dT \cdot \frac{\partial U(T; Z)}{\partial T} = \frac{1}{T'_H} \cdot [U(T_H; Z) - U(T'_H; Z)] = -\frac{Q_H}{T'_H}\end{aligned}$$

但し温度 T を積分の外に出すために、積分範囲では $T'_H \geq T$ を使いました。

同様に右辺は次のように書けます。

$$S(T'_L; Y) - S(T_L; Y) \leq -\frac{Q_L}{T'_L}$$

(1) ~ (3) より

$$\begin{aligned}\frac{Q_H}{T'_H} &\geq \frac{Q_L}{T'_L} \\ \therefore \frac{Q_H}{Q_L} &\geq \frac{T'_H}{T'_L}\end{aligned}$$

ヒートポンプの効率 η_c を熱溜から Q_L の熱量を取り出すのに必要な仕事 W との割合とすると (冷却器としての効率)

$$\eta_c = \frac{Q_L}{W} = \frac{Q_L}{Q_H - Q_L} = \frac{1}{\frac{Q_H}{Q_L} - 1} \leq \frac{1}{\frac{T'_H}{T'_L} - 1} = \frac{T'_L}{T'_H - T'_L}$$

ヒートポンプ効率 η_h を熱溜に Q_H の熱量を放出するのに必要な仕事 W との割合とすると (暖房機としての効率)

$$\eta_h = \frac{Q_H}{W} = \frac{Q_H}{Q_H - Q_L} = \frac{1}{1 - \frac{Q_L}{Q_H}} \leq \frac{1}{1 - \frac{T'_L}{T'_H}} = \frac{T'_H}{T'_H - T'_L}$$

これがエントロピー原理から導かれた、ヒートポンプの最大効率となります。モリエル図から読み取れる効率と比較しましょう。

この導出には熱溜が十分大きいという前提を置いていないことに注意しましょう。もし熱溜が十分大きく「熱溜に変化がない」とすると、この導出は出来ません。

ヒートポンプ運転終了後の高温・低温熱溜 (水槽) の温度とその間の電力量 (Wh) は測定できるので、実際の効率が理論限界とどのくらい離れているのか検証してください。その差が何に起因するのも考えましょう。