

# UE3070800 リサージュ図形

3B Scientific

18 December 2018

## 1 目的

電磁場内電子線トラジェクトリ観察機で x-y のリサージュ図形を観察した。振幅・周波数・位相によってリサージュ図形の形状は変わっていったが、どのパラメーターがどのように寄与しているのか確認するために、グラフを描くこと。

## 2 単振動の重ね合わせとしてのリサージュ図形

x 軸方向, y 軸方向とも単振動している状態でした。x と y で異なることができるのは、振幅・周波数・位相です。そこで x, y を媒介変数として時間  $t$  を使って次のように表せます。

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega_1 t + \alpha) \\ y(t) = B \sin(\omega_2 t + \beta) \end{cases}$$

x, y の振動波形を sin で表しましたが, cos でも書くことも可能ですし, x は sin, y は cos でも問題ありません。しかし, いずれも sin から位相がずれているだけなので sin で表し, 初期位相を, それぞれ  $\alpha$  と  $\beta$  としておけば一般性は失われません。

媒介変数である時間  $t$  を含んだ連立式で,  $t$  を消して陰関数にするのは困難なので, グラフにして軌道を見てみます。しかし, 上式の状態でも,  $\omega_1$  と  $\omega_2$  が自身も含めた公倍数を持たない場合は, 軌道は閉じない, ということが分かります。

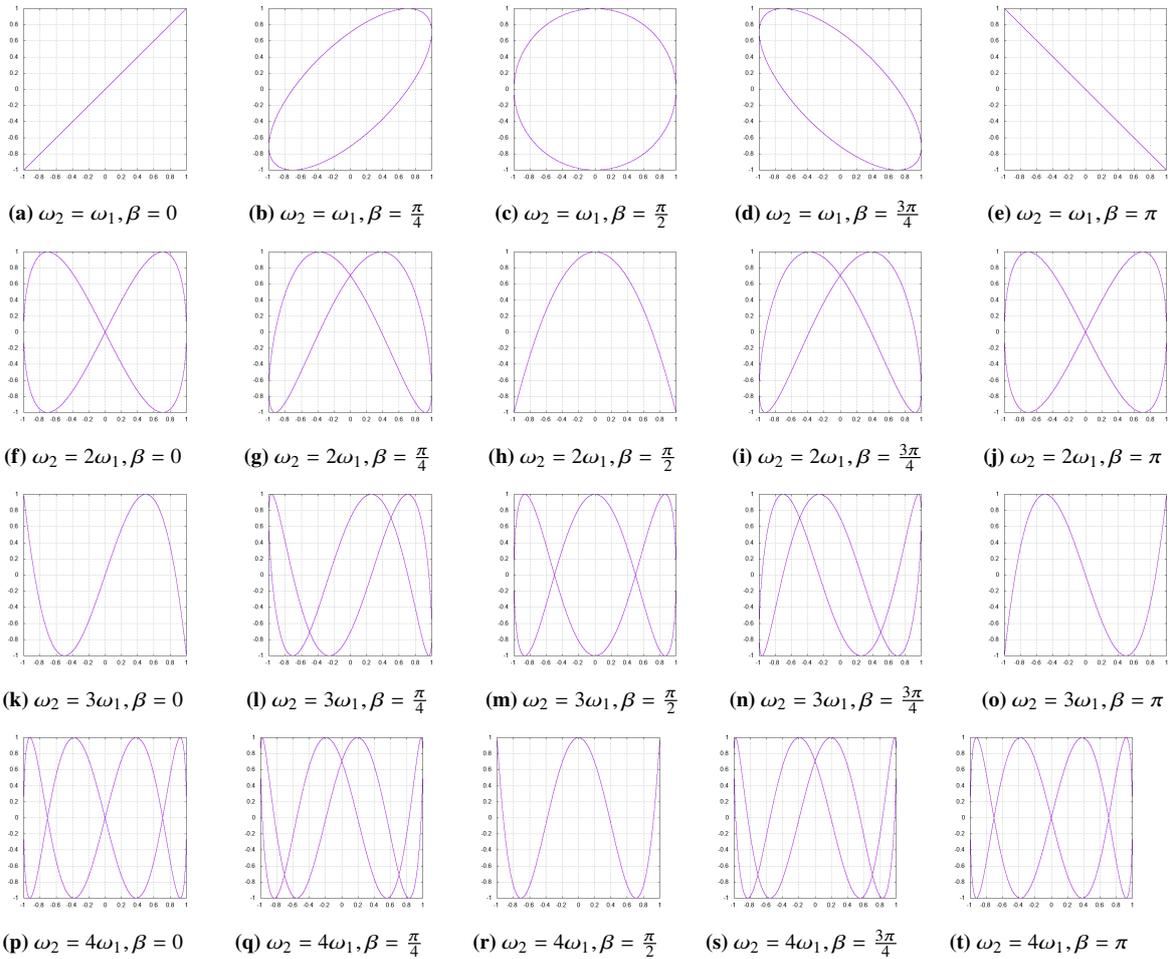
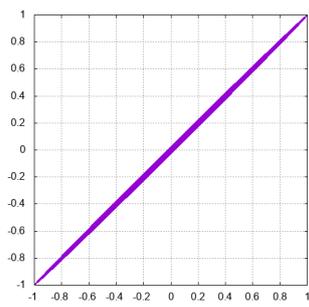


図 1: リサージュ図形と周波数, 位相の関係

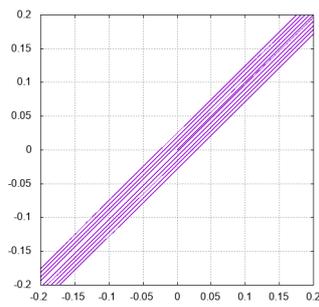
リサージュ図形は, 周波数の差異を鋭敏に反映します。そのため, かつては周波数の確認を基準周波数とともに, オシロスコープ上のリサージュ図形として観察していました。

$x, y$  の周波数が 0.1% 異なっているときのリサージュ図形が下のグラフになります。(  $\alpha = \beta = 0, \omega_1 = \pi, \omega_2 = \omega_1 \times 1.001, x$  の 5 周期分の描画 )

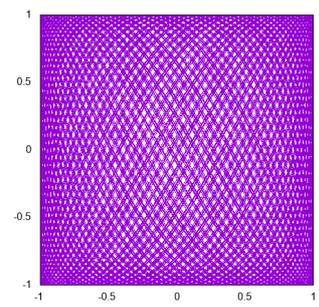
また, 最初に式形から判断できたように, 周波数の比が無理数の場合は, 軌道は閉じずに  $(-1, -1) - (1, 1)$  の四角形を塗りつぶすように変化していきます。(  $\alpha = \beta = 0, \omega_1 = \pi, \omega_2 = \sqrt{3}\omega_1, x$  の 70 周期分の描画 )



(a)  $\omega_1 = \pi, \omega_2 = \omega_1 \times 1.001$



(b) 2a の原点付近を拡大



(c)  $\omega_1 = \pi, \omega_2 = \sqrt{3}\omega_1$

図 2: 周波数に微小な差があるとき, 及び, 比が無理数のときのリサージュ図形