セット番号:**UE4030100**　単スリットの回折
基礎実験

光学/回折

Appendix：平面波の式からの干渉条件導出

目的
　平面波の式から重ね合わせの原理で単スリット・二重スリット・回析格子の干渉条件を導出すること，またバビネの原理の意味を考えること。

追加推奨機器

品番	品名
U84755401	クランプ・K 型
U14100	二重スリット・スリット幅違い 3 種
U14101	二重スリット・スリット間隔違い 4 種
U14102	複スリットセット
U14103	回折格子・3 種
U14106	直交回折格子・2 種（格子点と井桁)
U14107	単スリットと反転像
U14108	円形絞りと反転像・3 対
U8476600	単スリット 3 種と二重スリット

下記実験も参照してください。
UE4030200　光の回折・干渉
http://www.3bs.jp/physics/experiment/waveopt-expt/ue4030200.htm

　ホイヘンスの原理を用いて単スリットの回折から考えていきます。
　図 1 のように単スリットとスクリーンを置きます。この時の光源は単色光とします。

　ホイヘンスの原理は光の波面各点から素元波による球面波の光が発生するという考えです。単スリットもスクリーンも紙面垂直に無限に長い（スリットの上下端の影響を考えない）とすると図のままの一次元を考えれば十分であり，スクリーン上の各点へは平面波の式で記述できます。
　光（電磁波）の電場を複素数表現すれば次のようになりますが，実際に意味があるのはこの関数の実部である事に注意しましょう。

$$E(y,t) = E_0 \cdot e^{i\cdot(k\cdot r-\omega\cdot t+\theta)}$$

　ここで E_0 は電場振幅，r は単スリット面からスクリーンの距離，θ は単スリット面での初期位相ですが定数項であり後の計算に影響はないので 0 として消します。

　光の強さは電場振幅の二乗に比例します。これは電磁波が運ぶエネルギーはポインティング・ベクトルで表わされる事と，観測される光強度は振動数が大きいため電磁波強度の時間平均となるからです。

ポインティング・ベクトル S は次式で表わされます。

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

真空では（物質中でなければ）$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{B}$であり，$|\boldsymbol{B}| = \frac{1}{c} \cdot |\boldsymbol{E}|$。電場と磁場は直交していることから，光の強さは$|\boldsymbol{S}| = \frac{1}{\mu_0} \cdot |\boldsymbol{E}| \cdot |\boldsymbol{B}| = \frac{1}{c \cdot \mu_0} \cdot |\boldsymbol{E}|^2$を一周期にわたり平均することで求まります。平面波であれば振動部分の一周期での平均は定数になるため，光の強度は電場振幅 E_0 の二乗に比例する事が分かります。

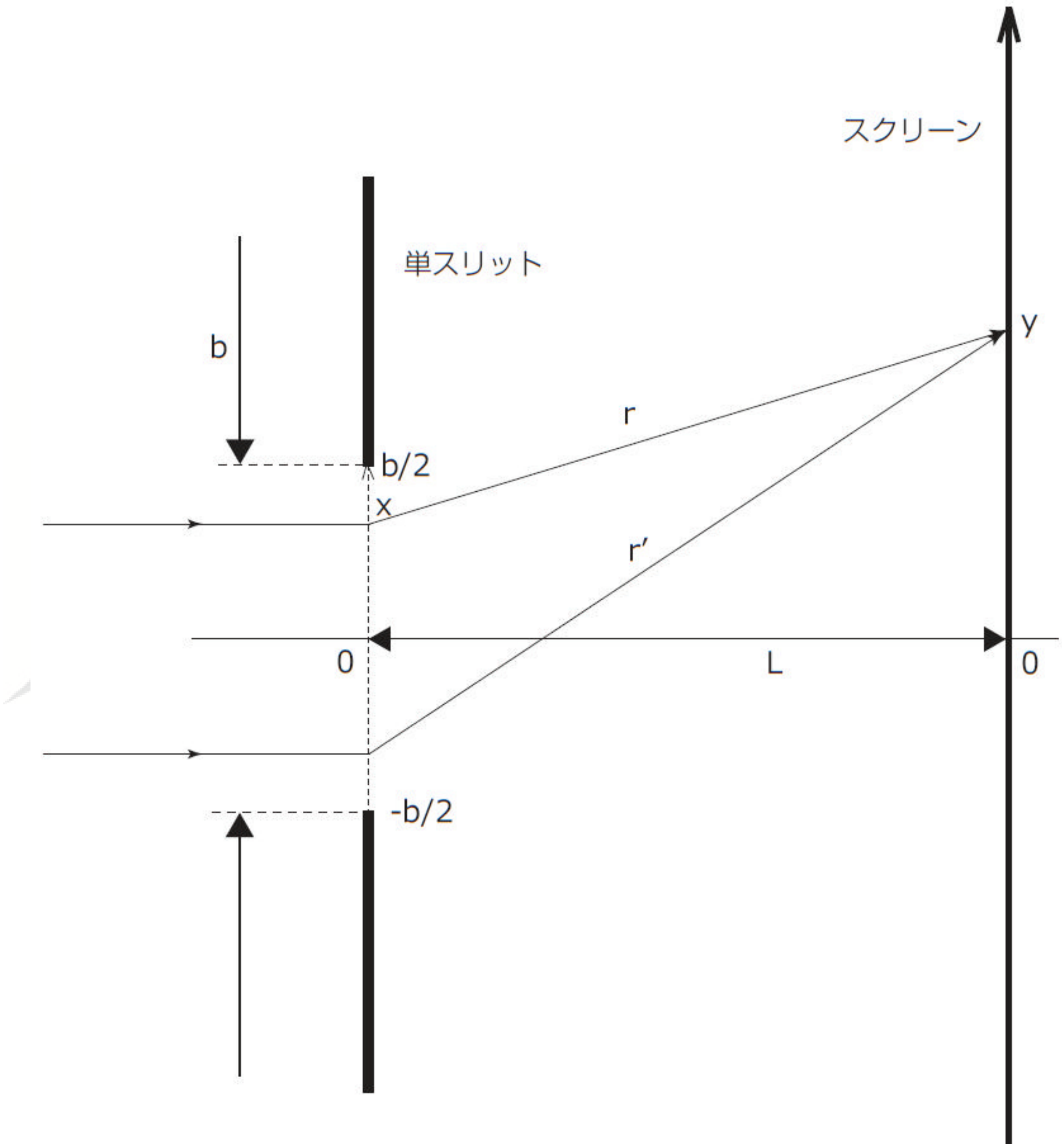

図 1：単スリットの回折（平面波での計算の座標）

単スリットによる回折は単スリット面上の全ての素元波が作る波の重ね合わせ（足し合

わせ）を計算するだけです。

重ね合わせは図 1 に示した座標 x について-b/2～b/2 までの積分となります。図から明らかなように r は x,y を用いて次のように表せます。

$$r = \sqrt{L^2 + (y-x)^2}$$

$$\therefore E(y,t) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E_0 \cdot e^{i\cdot\left(k\cdot\sqrt{L^2+(y-x)^2}-\omega\cdot t\right)} \cdot dx$$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E_0 \cdot e^{i\cdot\left(k\cdot L\cdot\sqrt{1+\left(\frac{y-x}{L}\right)^2}-\omega\cdot t\right)} \cdot dx$$

指数の肩をテイラー展開すると

$$\left(1+\left(\frac{y-x}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \sim 1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y-x}{L}\right)^2-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{y-x}{L}\right)^4+\cdots$$

通常 L>>(y-x)ですから 4 次以上の項を落とし

$$\left(1+\left(\frac{y-x}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \sim 1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y-x}{L}\right)^2 = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{L^2}\cdot(y^2-2x\cdot y+x^2)$$

と書けます。

更に x^2 が小さいとして無視すると，上式は

$$\left(1+\left(\frac{y-x}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \sim 1+\frac{y^2}{2L^2}-\frac{x\cdot y}{L^2}$$

となります。

x^2 が無視できるほど小さいとは，次の条件を満たしていることです。

$$\left|\frac{x^2}{2L}\cdot k\right| \ll 2\pi$$

$$\max(|x|) = \frac{b}{2} \text{ であり} k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{から}$$

$$\left|\frac{b^2}{8L}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\right| \ll 2\pi$$

$$\therefore L \gg \frac{1}{8}\cdot\frac{b^2}{\lambda} \sim \frac{b^2}{\lambda}$$

$L \gg \frac{b^2}{\lambda}$での回折をフラウンホーファー回折といいます。

実際に（2）式を計算し，単スリットの回折で重ね合わさった電場がどうなるか確かめます。

$$E(y,t) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E_0 \cdot e^{i\cdot\left(k\cdot L\cdot\sqrt{1+\left(\frac{y-x}{L}\right)^2}-\omega\cdot t\right)} \cdot dx$$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E_0 \cdot e^{i\cdot\left(k\cdot L\cdot\left(1+\frac{y^2}{2L^2}-\frac{x\cdot y}{L^2}\right)-\omega\cdot t\right)} \cdot dx$$

$$= E_0 \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}\right)} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-i\cdot k\cdot\frac{y}{L}\cdot x} \cdot dx$$

$$= E_0 \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}\right)} \cdot \frac{i}{k\cdot\frac{y}{L}} \cdot \left[e^{-i\cdot k\cdot\frac{y}{L}\cdot x}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$= E_0 \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}\right)} \cdot \frac{1}{k\cdot\frac{y}{L}} \cdot 2 \cdot \sin\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right)$$

積分を計算するときに y≠0 を仮定しています。また y=0 ならば積分は b ですから E(y,t)は次のように書けます。

$$E(y,t) = \begin{cases} E_0 \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}\right)} \cdot \dfrac{2}{k\cdot\frac{y}{L}} \cdot \sin\left(\left(\dfrac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right) & : y \neq 0 \\ E_0 \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot k\cdot L} \cdot b & : y = 0 \end{cases}$$

上式は sinc 関数を使って書き表すと見通しが良くなります。

$$\mathrm{sinc}\,(\mathrm{x}) = \frac{\sin x}{x}，\text{ただし } x = 0 \to \mathrm{sinc}(x) = 1 \text{ とします。}$$

$$\therefore E(y,t) = E_0 \cdot b \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}\right)} \cdot \mathrm{sinc}\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right)$$

・数学的な注

sinc 関数は x=0 で定義できませんが，$\lim_{x\to 0}\mathrm{sinc}(x) = 1$と極限が存在します。この時の x=0 を除去可能な特異点といい，sinc(0)=1 と定義しなおすことで引数を気にすることなく計算が出来ます。

次にスクリーン上の光の強さを考えます。光の強さ（強度）は電場振幅の二乗に比例します。それをはっきりと見るために，ここまで複素形で計算しましたが，実部のみで計算していきます。

$$\mathrm{Re}\big(E(y,t)\big) = E_0 \cdot b \cdot \mathrm{sinc}\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right) \cdot \cos\left(k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}\right) - \omega\cdot t\right)$$

$$I \propto \frac{1}{T}\cdot\int_0^T \Big(\mathrm{Re}\big(E(y,t)\big)\Big)^2 \cdot dt$$

$$= \left(E_0 \cdot b \cdot \mathrm{sinc}\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right)\right)^2 \cdot \frac{1}{T}\cdot\int_0^T \left(\cos\left(k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}\right) - \omega\cdot t\right)\right)^2 \cdot dt$$

煩雑なので，時間積分だけを取り出して計算を進めます。（積分に無関係な定数なので $\mathrm{A} = \mathrm{k} \cdot \left(\mathrm{L} + \frac{\mathrm{y}^2}{2\mathrm{L}}\right)$ とまとめます。）

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (\cos(A - \omega \cdot t))^2 \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(\frac{1 + \cos(2(A - \omega \cdot t))}{2}\right) \cdot dt$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore I \propto \frac{1}{2} \cdot \left(E_0 \cdot b \cdot \mathrm{sinc}\left(\left(\frac{k \cdot y}{2L}\right) \cdot b\right)\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \cdot b^2 \cdot \left(\mathrm{sinc}\left(\frac{k \cdot y}{2L} \cdot b\right)\right)^2$$

・・念のための計算

y ＝0 では

$$\mathrm{Re}\big(E(y = 0, t)\big) = E_0 \cdot b \cdot e^{i \cdot (k \cdot L - \omega \cdot t)}$$
$$\therefore I \propto \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \big(E(0, t)\big)^2 \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \cdot b^2$$

sinc(0)=1 なので，sinc 関数で y=0 の場合も正しく表現できていることが確かめられました。

強度 I の式より暗部は x=0 を除く sin(x)=0 の位置，つまり x=n・$\boldsymbol{\pi}$ を満たす位置である事が分かります。

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{k \cdot y}{2L} \cdot b\right) = 0 \rightarrow \frac{k \cdot y_n}{2L} \cdot b = n \cdot \pi \ (n \neq 0)$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ より，} \frac{\pi \cdot y_n}{\lambda \cdot L} \cdot b = n \cdot \pi$$
$$\therefore y_n = n \cdot \frac{\lambda \cdot L}{b} = \Delta \cdot n$$

本文で考えた暗部の条件と一致しています。

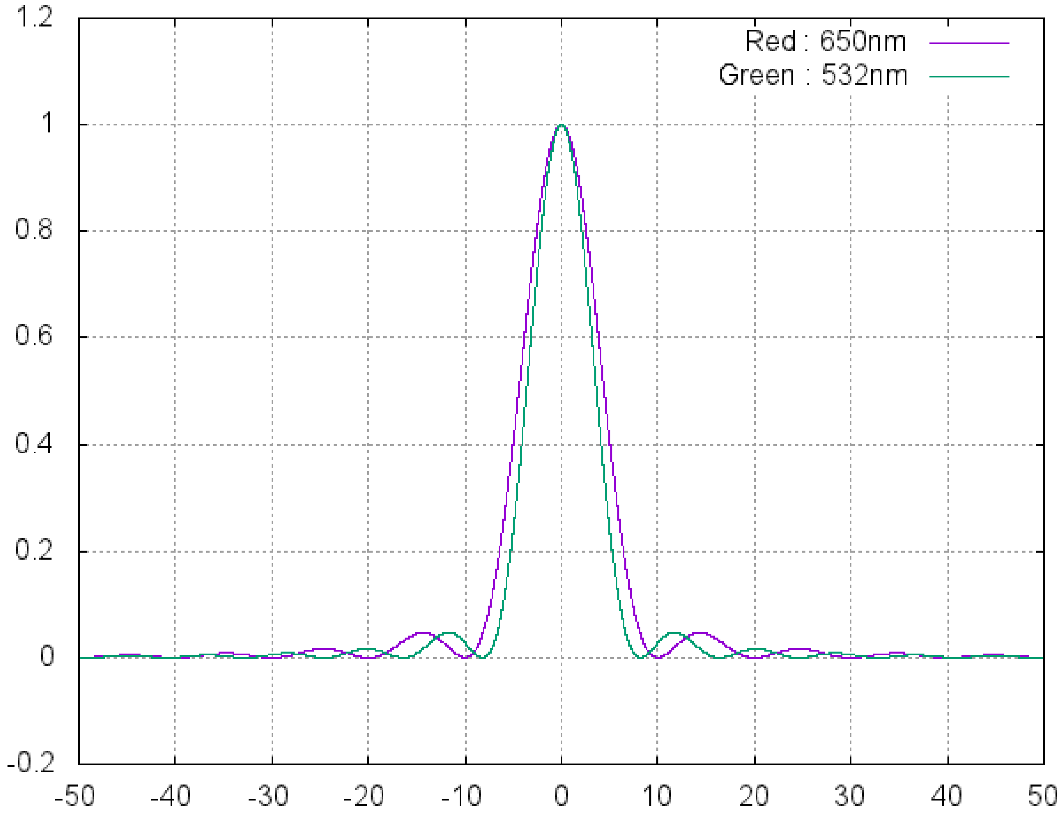

図 2：b=0.3mm，L=4.62m での赤色レーザー（λ=650nm）と緑色レーザー（λ=532nm）の回折光強度（縦軸：任意単位，横軸：mm 単位）

回折強度最大値を 1 に規格化しています。

・二重スリット

スリット間隔を d とします（図 3 参照，各スリット中心の間隔に取っています）

スリット幅 b の単スリットでの電場 E(y,t)が求まっているので，二重スリットは単スリットの足し合わせで表現できます。

変数の取り方を少し変えます。（図 3 参照）

対称な形なので，上側の積分部分を計算します。

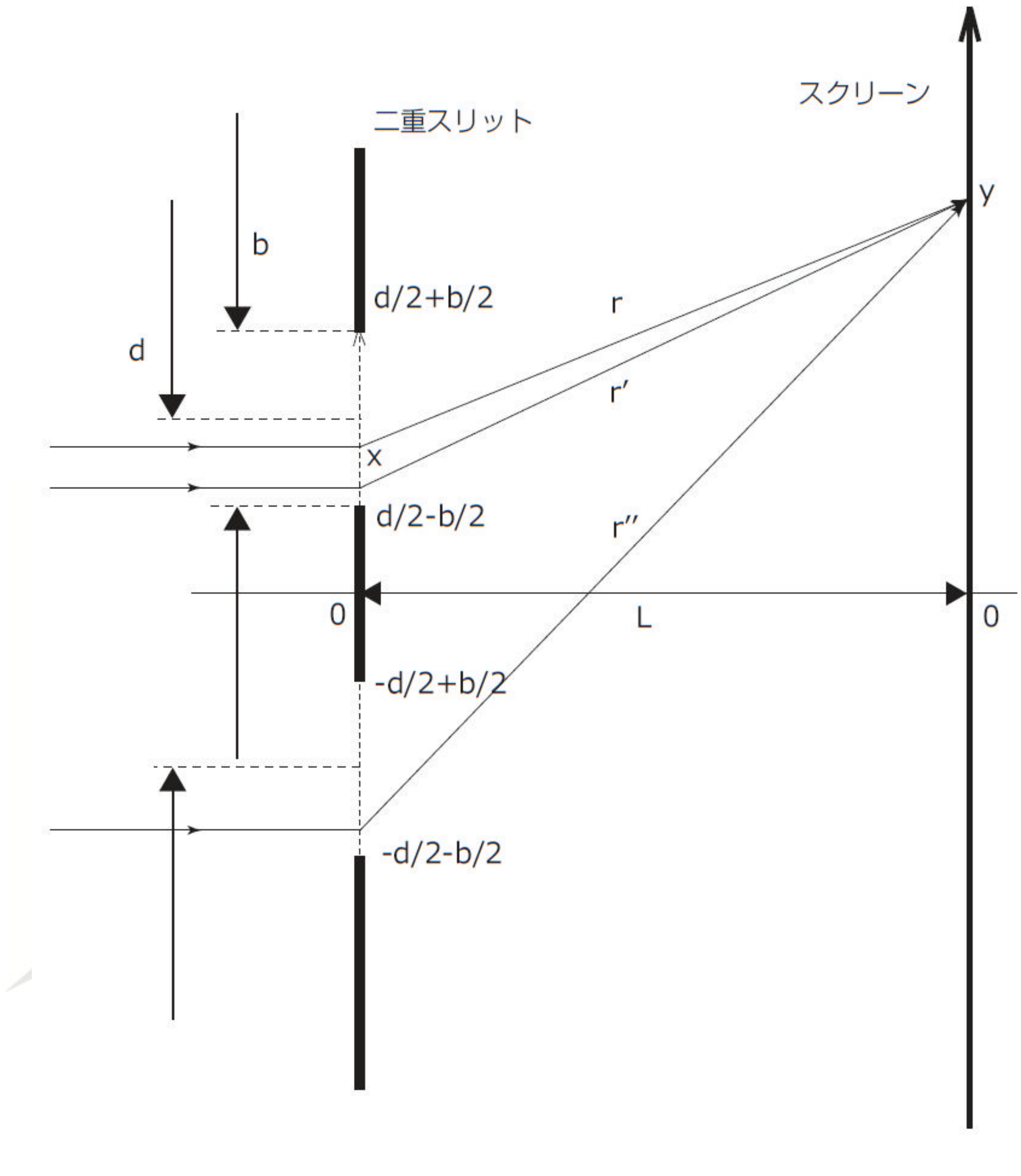

図 3：二重スリットの回折（平面波での計算の座標）

図 3 から分かるように(1)式で$x = x - \frac{d}{2}$と置き換えるとスリット幅の中心に対称な積分（単スリットと同一）になります。

上側のスリットでは

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-i \cdot k \cdot \frac{y}{L} \cdot \left(x + \frac{d}{2}\right)} \cdot dx$$

$$= e^{-i\cdot k\cdot\frac{y}{2L}\cdot d}\cdot\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-i\cdot k\cdot\frac{y}{L}\cdot x}\cdot dx$$

よって sinc 関数を用いて

$$E_u(y,t) = E_0\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}-\frac{y\cdot d}{2L}\right)}\cdot\frac{1}{k\cdot\frac{y}{L}}\cdot 2\cdot\sin\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right)$$

$$= E_0\cdot b\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}-\frac{y\cdot d}{2L}\right)}\cdot\mathrm{sinc}\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right)$$

下側も同様に$\mathrm{x} = \mathrm{x} + \frac{\mathrm{d}}{2}$と置き換え

$$E_l(y,t) = b\cdot E_0\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}+\frac{y\cdot d}{2L}\right)}\cdot\mathrm{sinc}\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right)$$

$$\therefore E(y,t) = E_u + E_l = E_0\cdot b\cdot e^{(-i\cdot\omega\cdot t)}\cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}\right)}\cdot\mathrm{sinc}\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right)\cdot\left(e^{-i\cdot k\cdot\left(\frac{y\cdot d}{2L}\right)} + e^{i\cdot k\cdot\left(\frac{y\cdot d}{2L}\right)}\right)$$

$$= E_0\cdot b\cdot e^{(-i\cdot\omega\cdot t)}\cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}\right)}\cdot\mathrm{sinc}\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right)\cdot 2\cdot\cos\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot d\right)$$

$$= 2E_0\cdot b\cdot e^{(-i\cdot\omega\cdot t)}\cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}\right)}\cdot\cos\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot d\right)\cdot\mathrm{sinc}\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right)$$

これからスクリーン上の各点での光の強さ I は

$$I \propto \frac{1}{T}\cdot\int_0^T\left(\mathrm{Re}\big(E(y,t)\big)\right)^2\cdot dt = 2\cdot E_0^2\cdot b^2\cdot\left(\cos\left(\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d\right)\right)^2\cdot\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{k\cdot y}{2L}\cdot b\right)\right)^2$$

ここで強度 I の最大値は，電場振幅などが同じであれば，単スリットの 4 倍となることに注意しましょう。

また二重スリットの干渉縞は単スリットの干渉縞に $\cos^2(x)$を掛けた形となる事も分かります。（図 4，5 参照，二重スリットの干渉縞ピークが同一スリット幅の単スリット干渉縞ピーク強度に従っています。）

また暗部の条件は単スリットの時の条件＋cos(y)=0（y=(n+1/2)$\boldsymbol{\pi}$）の位置という事になります。

$$\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot d = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{y_n}{2L}\cdot d = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi$$

$$\therefore y_n = \begin{cases} n\cdot\frac{\lambda\cdot L}{b}, (n\neq 0) \\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\lambda\cdot L}{d}\end{cases}$$

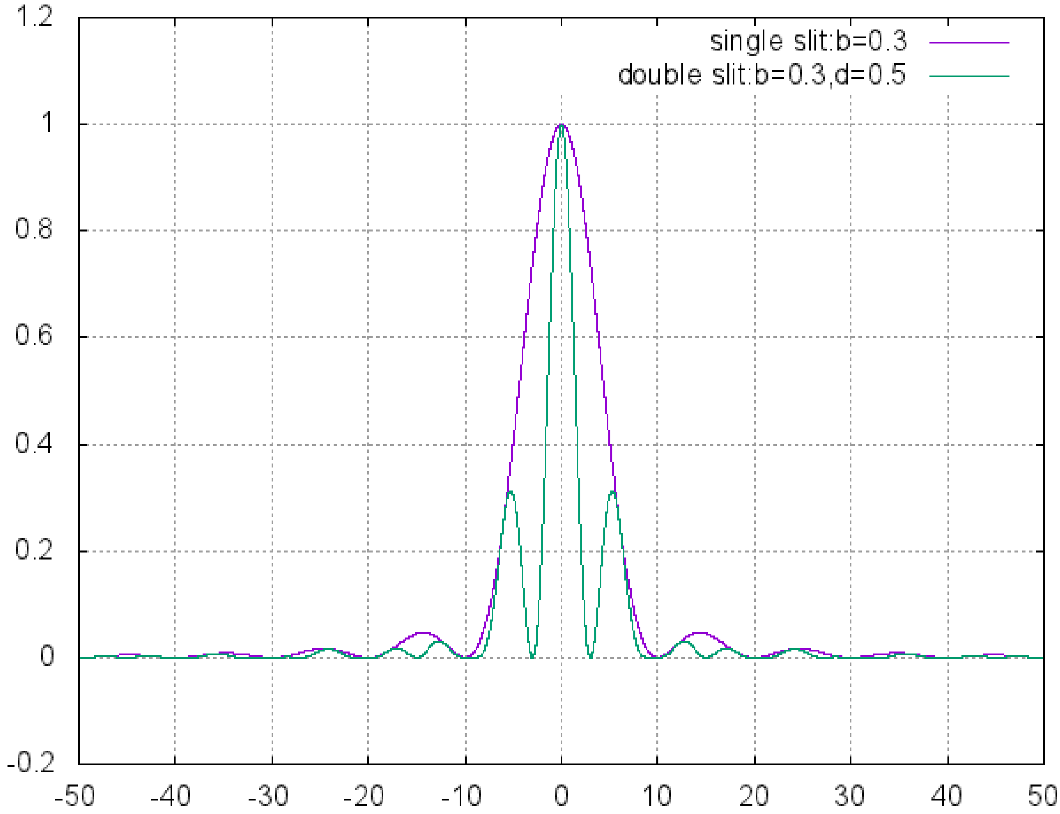

図 4：b=0.3mm，d=0.5mm，L=4.62m，赤色レーザーでの回折パターン
（単スリットと二重スリットの比較）
回折強度最大値を 1 に規格化しています。（以下のグラフも全て同じ）

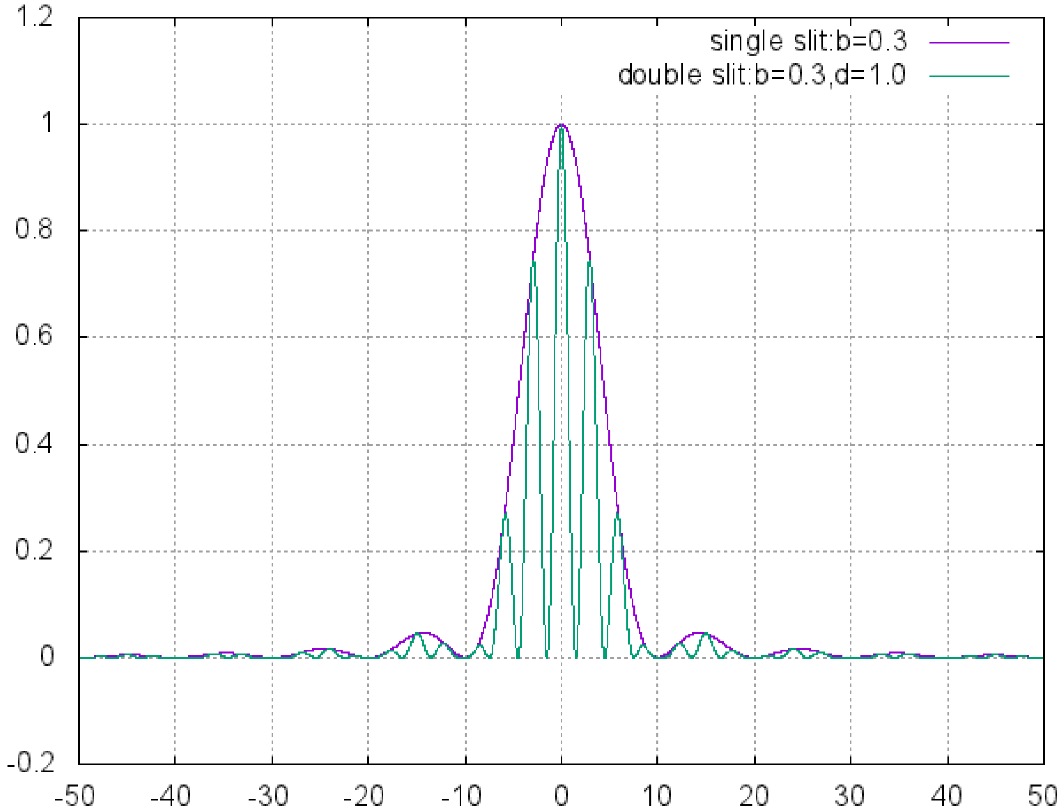

図 5：b=0.3mm，d=1.0mm，L=4.62m，赤色レーザーでの回折パターン
（単スリットと二重スリットの比較。図 4 との違いに注目しましょう。）

高校の物理では，二重スリットのスリット幅は非常に小さく，コヒーレントな点光源 2 つと同様に扱っています。b→0 の極限で y_n の上側の条件式は発散するので，この条件での暗部は現れません。そのため二重スリットのピークは全て同じ強度となってしまいますが，下側条件式のみが生き

$$y_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda \cdot L}{d}$$

となります。

・多重スリットと回折格子
これまでと同様に重ね合わせの原理で計算できます。

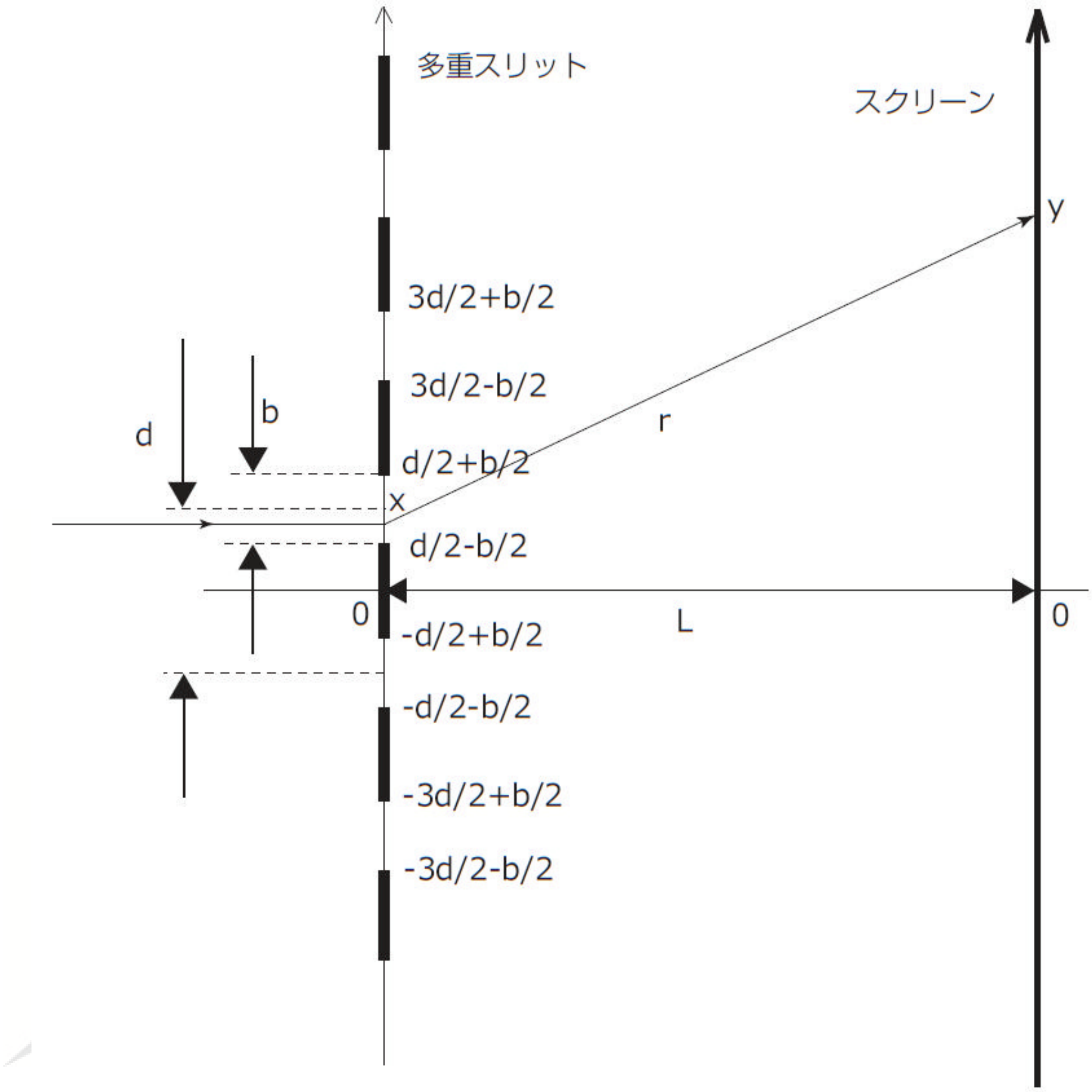

図 6：多重スリットの回折（平面波での計算の座標），N が偶数の場合

図 6 のように座標を取り N 個（偶数個）のスリットによる回折を考えます。
（1）式から各スリットからの電場 En は，積分範囲が$\left(n+\frac{1}{2}\right)d-\frac{b}{2}\sim\left(n+\frac{1}{2}\right)d+\frac{b}{2}$となることに注意すると

$$E_n(y,t)=E_0\cdot b\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}-\frac{y}{L}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot d\right)}\cdot \mathrm{sinc}\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right)$$

と表せ，$\mathrm{n}=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm\left(\frac{\mathrm{N}}{2}-1\right),-\frac{\mathrm{N}}{2}$です。

よって実際の電場 E は次の式になります。

$$E(y,t)=\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}E_n(y,t)=\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}E_0\cdot b\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}-\frac{y}{L}\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot d\right)}\cdot \mathrm{sinc}\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right)$$

和に関する部分だけを取り出すと次のようになります。

$$\therefore \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}e^{-i\cdot k\cdot\frac{y}{L}\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot d}=e^{-i\cdot k\cdot y\cdot\frac{d}{2L}}\cdot\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}e^{-i\cdot n\cdot\frac{k\cdot y}{L}\cdot d}$$

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}e^{-i\cdot n\cdot\frac{k\cdot y}{L}\cdot d}=e^{i\cdot N\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}e^{-i\cdot n\cdot\frac{k\cdot y}{L}\cdot d}$$

$$=e^{i\cdot N\cdot\frac{k\cdot y}{2}\cdot d}\cdot\left(1+e^{-i\cdot\frac{k\cdot y}{L}\cdot d}+e^{-2i\cdot\frac{k\cdot y}{L}\cdot d}+e^{-3i\cdot\frac{k\cdot y}{L}\cdot d}+\cdots+e^{-i\cdot(N-1)\cdot\frac{k\cdot y}{L}\cdot d}\right)$$

$$=e^{i\cdot N\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d}\cdot\left(\frac{e^{-i\cdot N\frac{k\cdot y}{L}\cdot d}-1}{e^{-i\cdot\frac{k\cdot y}{L}\cdot d}-1}\right)$$

$$=e^{i\cdot N\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d}\cdot\frac{e^{-i\cdot N\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d}\cdot\left(e^{-i\cdot N\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d}-e^{i\cdot N\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d}\right)}{e^{-i\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d}\cdot\left(e^{-i\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d}-e^{i\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d}\right)}$$

$$=e^{i\cdot N\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d}\cdot e^{-i\cdot N\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d}\cdot\frac{\sin\left(\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d\cdot N\right)}{\sin\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)}$$

ここでは y≠0 とします。

$$\therefore E(y,t)=E_0\cdot b\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}-\frac{y\cdot d}{2L}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d\cdot N\right)}{\sin\left(\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d\right)}\cdot\mathrm{sinc}\left(\left(\frac{k\cdot y}{2L}\right)\cdot b\right)$$

$$I\propto\frac{1}{2}\cdot E_0^2\cdot b^2\cdot\left(\frac{\sin\left(N\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d\right)}{\sin\left(\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d\right)}\right)^2\cdot\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{k\cdot y}{2L}\cdot b\right)\right)^2$$

多重スリットの回折強度は単スリットの回折強度に$\left(\frac{\sin\left(N\cdot\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d\right)}{\sin\left(\frac{k\cdot y}{2L}\cdot d\right)}\right)^2$が掛かった形となります。

N が奇数の場合は中央のスリット中心に x 軸原点を取ると，各積分範囲が$n\cdot d-\frac{b}{2}\sim n\cdot d+\frac{b}{2}$であること，和の範囲が$-\frac{N-1}{2}\sim\frac{N-1}{2}$であることに注意して計算すれば強度 I が同じ表式となることが分かります。

いくつか多重スリットの回折強度のグラフを比較しましょう。

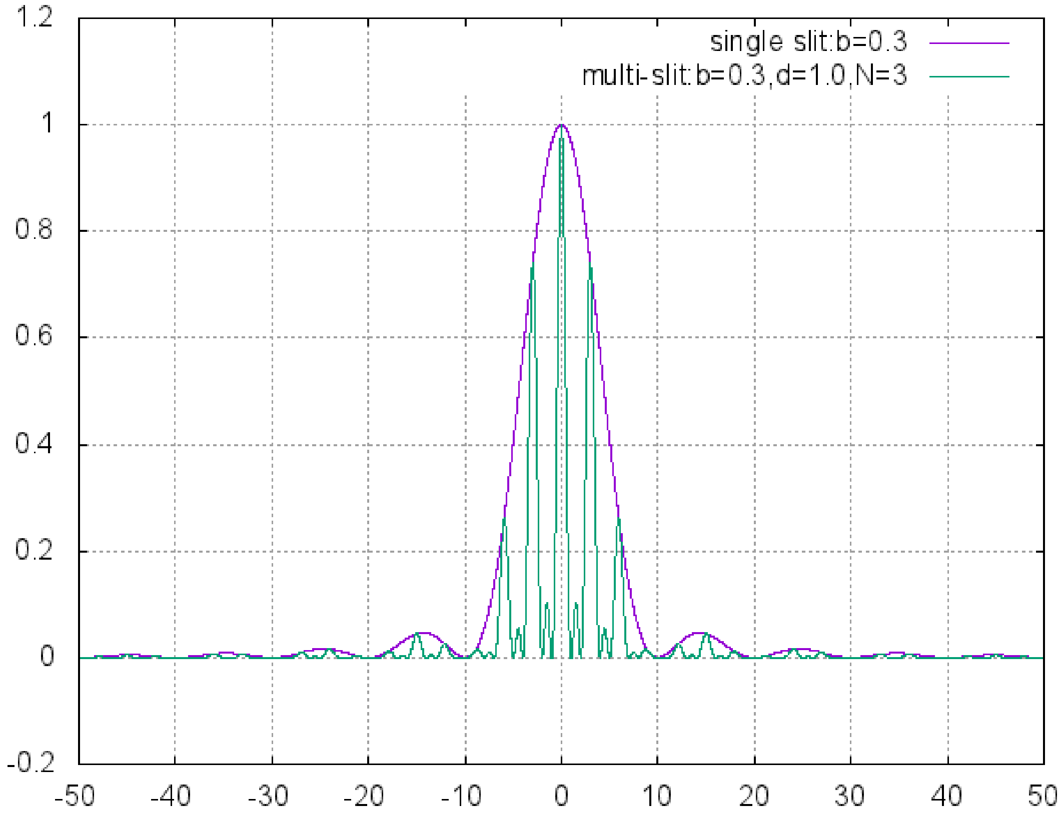

図 6：b=0.3mm，d=1.0mm，N=3，L=4.62m，赤色レーザーでの回折パターン

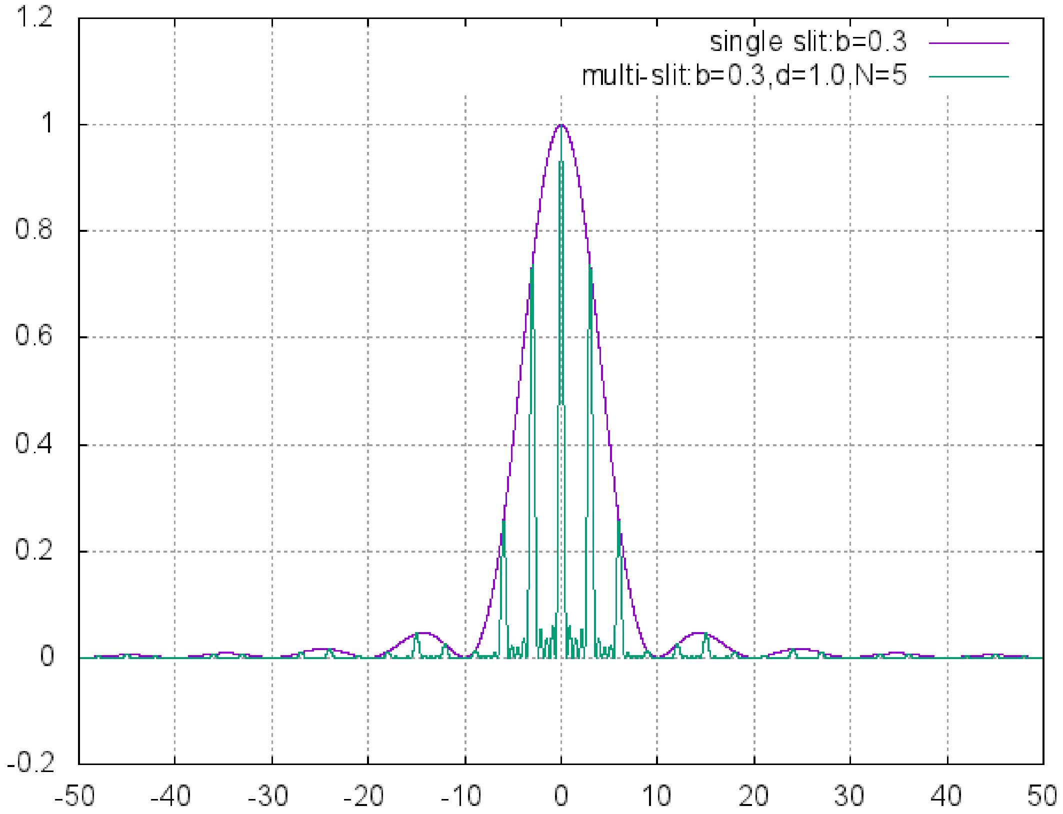

図 7：b=0.3mm，d=1.0mm，N=5，L=4.62m，赤色レーザーでの回折パターン

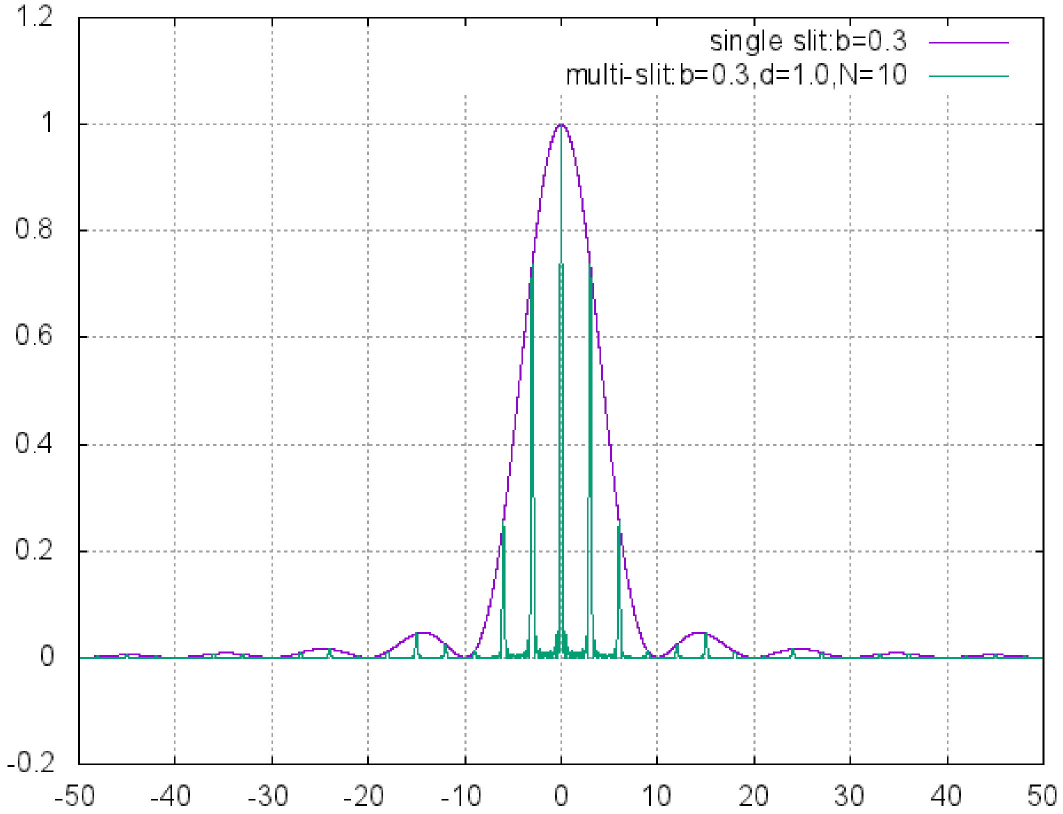

図 8：b=0.3mm，d=1.0mm，N=10，L=4.62m，赤色レーザーでの回折パターン

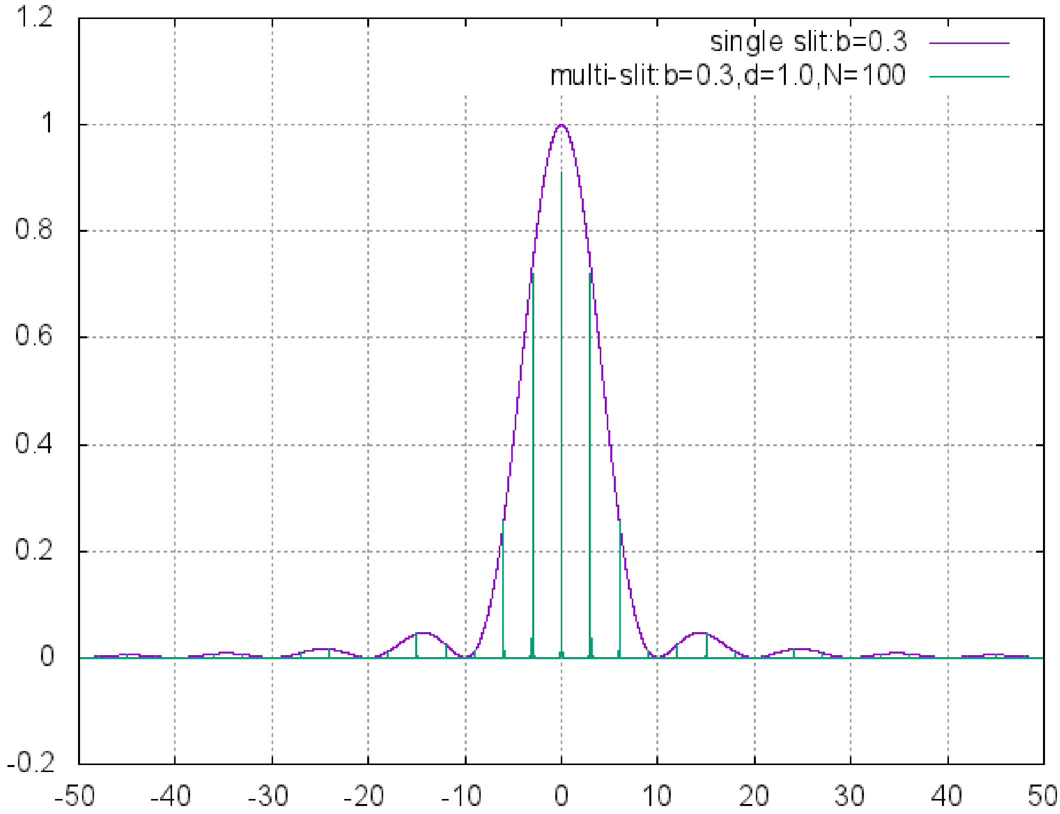

図 9：b=0.3mm，d=1.0mm，N=100，L=4.62m，赤色レーザーでの回折パターン

多重スリットで N を大きくとれば，回折格子の回折強度を与えます。

・バビネの原理

バビネの原理は次のように表わされます。

『互いに相補的な開口 Ua と遮蔽 Ud による波動の和は何も置かないときの波動 U0 に等しくなる。』

$$\therefore U_a + U_d = U_0$$

ここから Ua＝0 の点では Ud=U0，また U0=0 の点では Ua=-Ud となります。

具体的な式にしてみましょう。

単スリットとそのネガ像の場合を比較します。単スリットの回折は既に計算していますので，そのネガ像（細いワイヤーなど）がどうなるか考えます。。

座標の取り方は単スリットと同様にし，光源からの光（コヒーレントな平行光）の幅を C とし，非常に大きいとします。図から明らかなように，単スリットとは積分の範囲が異なるだけになります。

また，ここでも b に対するフラウンホーファー回折の条件は成り立っているものとしま

すが，C に対して$L \gg \frac{C^2}{\lambda}$は成り立っていません。

$$E(y,t) = E_0 \cdot \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{C}{2}} e^{i\cdot\left(k\cdot\sqrt{L^2+(y-x)^2}-\omega\cdot t\right)} \cdot dx + E_0 \cdot \int_{-\frac{C}{2}}^{-\frac{b}{2}} e^{i\cdot\left(k\cdot\sqrt{L^2+(y-x)^2}-\omega\cdot t\right)} \cdot dx$$

$$= E_0 \cdot \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} e^{i\cdot\left(k\cdot\sqrt{L^2+(y-x)^2}-\omega\cdot t\right)} \cdot dx - E_0 \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot k\cdot\left(L+\frac{y^2}{2L}\right)} \cdot \int_{-\frac{B}{2}}^{-\frac{b}{2}} e^{-i\cdot k\cdot\frac{y}{L}\cdot x} \cdot dx$$

$$= E_0 \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{i\cdot k\cdot L} \cdot \left(\int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} e^{i\cdot k\cdot\left(\frac{1}{2L}\right)\cdot(y-x)^2} \cdot dx - e^{i\cdot k\cdot\frac{y^2}{2L}} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} e^{-i\cdot k\cdot\frac{y}{L}\cdot x} \cdot dx\right)$$

括弧内第一項の定積分は初等関数では表せませんが，意味を考えて見ます。この第一項が無視できれば，単スリットと同じ幅の細い写影体では，電場 E(y,t)は，単スリットの回折と符号が反転しています。つまり位相が $\boldsymbol{\pi}$ ズレていることになります。また，回折による光強度は単スリットと同じになります。

よって，回折に寄与しない光の影響を除くと，回折パターンは同じとなります。