UE4030410 干渉計による空気の屈折率測定

3B Scientific

28 May 2020

1　空気の屈折率と圧力が比例すること

精密な議論をするには種々の補正が必要ですが，気体のように物質が希薄であれば次のように屈折率と圧力の関係を考えることができます。

1.1　比誘電率と屈折率

光の振動数は大きく，物質の磁場追従性が小さくなります。ここでは空気を非磁性物質として磁場の影響を無視し，比透磁率 $\mu_r = 1$ とします。また光学的に等方で誘電率はスカラーとなります。

このとき屈折率 n は次のように比誘電率 ε_r の平方根になります。

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{c_0}{c_1} \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_0}{\varepsilon_0 \mu_0}} \\
&= \sqrt{\varepsilon_r}
\end{aligned}
$$

c は光速で，添え字の 1 は物質中の値を示します。

1.2　比誘電率と分極

気体分子は外からの電磁場により影響を受けます。水分子のように元から電気双極子モーメントを持つものもありますが，もともと電気双極子モーメントを持たない分子であっても，外からの電場により電子配置が釣り合いからずれることで電気双極子モーメントを持つようになります。

電気双極子モーメントが作る電場は次のようになります。座標の原点は電荷 $\pm q$ の中点とし，$\mathbf{d}$

は $-q$ から $+q$ へのベクトルです。また電場の式で位置 $\mathbf{r}$ は $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{d}|$ とします 。

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2}}{\left|\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2}\right|^3} - \frac{\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2}}{\left|\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2}\right|^3} \right) \\ &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|^5} \left\{ 3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{r} - |\mathbf{r}|^2\mathbf{p} \right\} \end{aligned} \tag{1}$$

ここで電気双極子モーメント $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ の置き換えをしています。[*1]

分子 1 個が外部電場 $\mathbf{E}$ により分極した事による電気双極子モーメント $\mathbf{p}$ は，その分子が感じる周囲の分子の影響を含む電場を $\mathbf{E}_m$，比例係数を分極率 α と書けば

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_m \tag{2}$$

となります。単位体積あたりの分子数を N とすれば，この物質の単位体積あたりの分極による電気双極子モーメント $\mathbf{P}$ は

$$\mathbf{P} = N\alpha\mathbf{E}_m$$

と書けます。

扱う物質は空気（気体）であり，電子配置の平衡位置からのズレは気体分子の原子間距離よりも十分小さいこと。また (1) 式で見たように電気双極子モーメントが作る電場はクーロン則の $1/r^2$ よりも早く減衰することより，周囲の気体分子が作る電場の影響はほとんど受けず，(2) 式で $\mathbf{E}_m = \mathbf{E}$ と書き換えます。

$$\mathbf{P} = N\alpha\mathbf{E} \tag{3}$$

また，比誘電率 ε_r を使えばマクスウェル方程式から

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_r\varepsilon_0\mathbf{E} \tag{4}$$

(3)(4) 式から分極率 α と比誘電率 ε_r，屈折率 n は次の関係を持ちます。

$$\begin{aligned}\frac{N\alpha}{\varepsilon_0} &= (\varepsilon_r - 1) \\ &= n^2 - 1\end{aligned}$$

[*1] (1) 式は見ずらいですが，電場の大きさは $1/r^3$ で減衰しています

1.3　屈折率と圧力

今 $(N\alpha)/\varepsilon_0 \ll 1$[*2]なので近似すれば，

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{1+\frac{N\alpha}{\varepsilon_0}} \\ &\approx 1+\frac{1}{2}\frac{N\alpha}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

単位体積あたりの分子数 N は，空気を理想気体としアボガドロ数 N_A とボルツマン定数 k_B を使うことで状態方程式

$$pV = k_B N_A T$$

から単位体積あたりの分子数は

$$\frac{N_A}{V} = \frac{p}{k_B T}$$

と圧力 p に比例します。

まとめると

$$\begin{aligned} n-1 &\approx \frac{1}{2}\frac{N\alpha}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{\alpha}{2\varepsilon_0 k_B T}p \end{aligned}$$

と温度一定のもとで $n-1$ が圧力 p に比例することが分かります。

2　干渉計での空気の屈折率測定

気体の屈折率の圧力依存を一次近似として

$$n(p) - 1 = \frac{\Delta n}{\Delta p}\Delta p$$

[*2] これは空気の屈折率が極めて 1 に近い，空気中の光速は真空中の光速とほぼ同じ，という意味ですね

とし，$\Delta n/\Delta p$ は 1 節の議論により一定とします。よって気体で圧力が異なるときの屈折率の差 Δn は次のように計算できます。

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{c_0}{c_1} \\
n' &= \frac{c_0}{c_1{}'} \\
\Delta n &= n - n' \\
&= c_0 \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1{}'} \right) \\
&= \lambda_0 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1{}'} \right) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ここで λ は波長であり，添字の $0, 1$ はそれぞれ真空中，気体中の値を示します。またダッシュのついた記号は圧力 p' での値を意味します。

干渉計で計測するときには屈折率の差を光路差で検出します。(5) 式の $1/\lambda_1 - 1/\lambda_1{}'$ は単位長さあたりの波数の差であり，光はキュベットを 2 回通過します。よって，この部分での波数の差 Δk はキュベットの内寸を I_z とすれば $2I_z\,(1/\lambda_1 - 1/\lambda_1{}')$ で，これにより干渉縞の変化数 Δm が生じます。

よって $\Delta n/\Delta p$ は次のように表せます。

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta n}{\Delta p} &= \frac{\lambda_0 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1{}'} \right)}{\Delta p} \\
&= \frac{\lambda_0}{2I_z} \frac{\Delta m}{\Delta p} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

このように干渉縞の変化数と圧力の変化から，屈折率の圧力依存係数を求めることができます。

3　測定結果

キュベットを大気圧から徐々に減圧し，干渉縞数の変化を測定しました。大気圧として $p_0 = 1000[\mathrm{hPa}]$ を取りました。また，$\Delta p = |p_0 - p|$，p はキュベット内圧力です。同様に Δm も絶対値を取っています。表 1 に測定結果を示します。また，測定結果と最小二乗法でフィッティングした近似直線のグラフを図 1 に示しました。

図 1 から $\Delta m/\Delta p = 0.037$ でした。キュベットの光線方向の内寸は 41mm なので，$\Delta n/\Delta p$ は (6) 式より次のようになります。

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta n}{\Delta p} &= \frac{\lambda_0}{2I_z} \times 0.037 \\
&= 0.29 \times 10^{-6}\,\mathrm{hPa}^{-1} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

p [hPa]	Δp [hPa]	Δm
780	220	10
580	420	16.5
450	550	21.5
350	650	25
280	720	28
220	780	30
200	800	31
180	820	32
160	840	33

表 1: 空気の屈折率の圧力依存

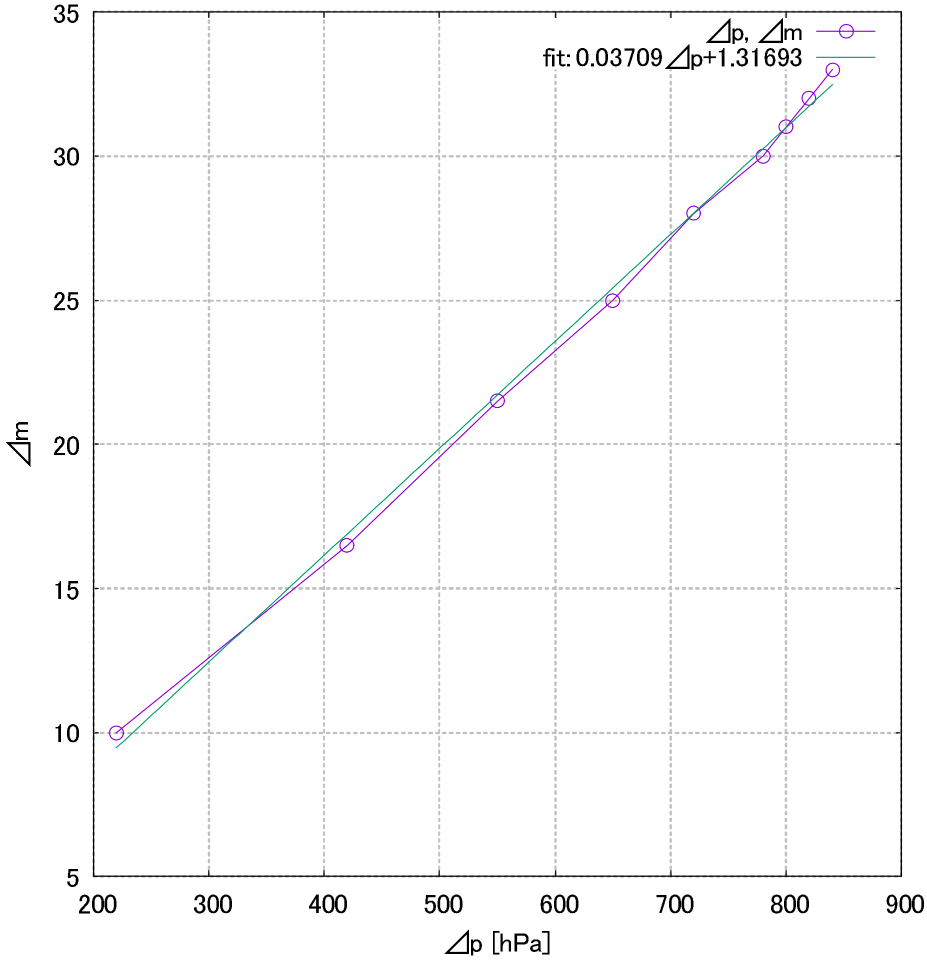

図 1: 圧力差 Δp と干渉縞変化数 Δm

理科年表では $T = 15\,°\mathrm{C}$, $p = 1013.25\,\mathrm{hPa}$ の乾燥空気で $n \approx 1.000277$ となっているので，(7) 式に $p = 1013.25\,\mathrm{hPa}$ を代入した値 1.000294 が良く空気の屈折率を表していることが分かります。