

# UE4040500 誘電率テンソルとポッケルス効果

3B Scientific

20 June 2021

## 1 目的

ポッケルス効果が起こる機構を誘電率テンソルを使って理解し、実験で観察されるコンスコープ像の干渉縞形状を定性的に導く。

## 2 結晶の誘電率テンソル

### 2.1 エネルギー保存則と誘電率テンソルの対称性

結晶格子は決まった軸に沿って並進対称性を持ち、ファラデー効果で扱ったガラスという非晶質で光学的に等方な物質とは異なり、等軸晶系以外の結晶は光学的に非等方な物質となり複屈折を示します。これを光学的異方性といいます。光学的異方性は光学軸と呼ばれる、複屈折を「示さない」光線方向の本数で一軸性、二軸性に分類されます。

一軸性、二軸性は電気的には(比)誘電率テンソルを主軸変換したときの対角成分3つが次のような関係になっているためです\*1。

- 成分2つが等しく、残り1つが異なる: 一軸性
- 成分3つが全て異なる: 二軸性

この光学的異方性が物質の誘電率に起因することをマクスウェル方程式を使って確認し

---

\*1 対角成分が全て等しければ、光学的異方性を持たないということになります。

ていきます。

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

ここでは結晶中の光を考えるので、伝導電流も真電荷もないとして  $\mathbf{i} = 0, \rho = 0$  とします。

また光の振動数は数百 THz と非常に大きいので物質の磁場追従性がないとし、物質の透磁率  $\mu$  を真空の透磁率  $\mu_0$  で置き換えます。よって

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

となります。

物質中の電束密度  $\mathbf{D}$  は比誘電率テンソル  $\varepsilon_r$  を使い、次のように表せます<sup>\*2</sup>。

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$

成分で表せば、

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_j \varepsilon_{ij} E_j$$

となります。

電磁波のエネルギーの流れはポインティング・ベクトル  $\mathbf{S}$  で表わされます<sup>\*3</sup>。

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

電磁場のエネルギー密度  $u(\mathbf{r}, t)$  は、

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) + \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (2)$$

です。

電磁場のエネルギー保存則は次のように表わされます。

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$$

<sup>\*2</sup> 光学的異方性がある物質で比誘電率がテンソルとなることは、UE4040600 磁気光学効果～ファラデー効果の [Appendix](#) を参照してください。

<sup>\*3</sup> 電磁気学でやったようにマクスウェル方程式から (1) 式-(3) 式が導びかれます。

結晶中では伝導電流  $\mathbf{i}$  がないとしたので右辺は 0 になり,

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3)$$

(3) 式は連続の式の形になっています。

(3) 式のポインティング・ベクトル  $\mathbf{S}$  の発散をマクスウェル方程式を使って書き換えると<sup>4</sup>, 次のとおりです。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\ &= \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &= -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{B}} - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \epsilon_r \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (5)$$

(4) 式でベクトル解析の公式を使っています。

また, エネルギー密度の時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}}) + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{H}}) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \epsilon_r \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \epsilon_r \dot{\mathbf{E}}) + \mu_0 \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (6)$$

であり, (5) 式 (6) 式からエネルギー保存則 (3) 式が成り立つには, 次の条件が必要です。

$$\dot{\mathbf{E}} \cdot \epsilon_r \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \epsilon_r \dot{\mathbf{E}} = 2\mathbf{E} \cdot \epsilon_r \dot{\mathbf{E}}$$

よって

$$\dot{\mathbf{E}} \cdot \epsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \epsilon_r \dot{\mathbf{E}} \quad (7)$$

(7) 式は成分で書くと次のとおりです。

$$\sum_i \left\{ \dot{E}_i \left( \sum_j \epsilon_{ij} E_j \right) - E_i \left( \sum_j \epsilon_{ij} \dot{E}_j \right) \right\} = 0$$

添字  $i, j$  はすべて和を取るなので, 次のように書き換えることができます。

$$\sum_{i,j} \{ (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}) E_i \dot{E}_j \} = 0$$

<sup>4</sup> 時間に関する偏微分ですが,  $\mathbf{B}, \mathbf{E}$  とも場の量なので, それらに入る変数である位置ベクトル  $\mathbf{r}$  が時間にあらわに依存することはない, 結局, 通常的时间微分となりドットを使っています。

よってエネルギーが保存するためには

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (8)$$

が成り立つ必要があります。

(8) 式は比誘電率テンソルの成分が添字の入れ替えに対して不変であることを示しています。つまり、対称行列で表わすことができます。これから比誘電率テンソルの成分 9 個から、独立なものは 6 個となります。

$$\varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_{xy}(= \varepsilon_{yx}), \quad \varepsilon_{xz}(= \varepsilon_{zx}), \quad \varepsilon_{yz}(= \varepsilon_{zy})$$

線形代数で、対称行列は適当な行列で対角化が可能な事が分かっています (主軸変換)。

$${}^t\mathbf{U}\mathbf{D} = \varepsilon_0 {}^t\mathbf{U}\varepsilon_r\mathbf{U}{}^t\mathbf{U}\mathbf{E}$$

ここで  $\mathbf{U}$  は  $\varepsilon_r$  を対角化する正則な行列で  ${}^t\mathbf{U}$  は  $\mathbf{U}$  の転置行列です。

この対角化された比誘電率  $\varepsilon_r$  を用いると、

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (9)$$

となります。 $\mathbf{E}, \mathbf{D}$  は同じ変換  ${}^t\mathbf{U}$  を受けているので同じ座標系で表わされ、最初にとった座標系の値とは異なってきます<sup>\*5</sup>。この直交座標系の  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸を誘電主軸と呼び、電場のエネルギー密度  $u_E$  は (2) 式の右辺第一項から、次のように単純な式となります。

$$\begin{aligned} u_E &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} (\varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2) \end{aligned} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0} \left( \frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \right) \quad (11)$$

$u_E$  は正なので (10) 式 (11) 式の形から分かるように、3次元空間の楕円体表面を表しています。比誘電率が対角化された座標系での電束密度は、この楕円体表面のいずれかの点に対応します<sup>\*6</sup>。

<sup>\*5</sup> 便宜上  $x, y, z$  と表記していますが、比誘電率を対角化する前の座標系とは異なる座標系の  $x, y, z$  になります。直交行列で変換されているので、変換後の座標軸  $x, y, z$  も直交しています。

<sup>\*6</sup> ここでは単色光を扱うとし、光の振動数による誘電率の分散は考えないとしています。

## 2.2 電場ベクトルと電束密度ベクトルの向き

光学的異方性がある物質中では電場ベクトルと電束密度ベクトルの向きが異なることを示します。

物質に入射する光が単色光の平面波<sup>\*7</sup>で、電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{B}$  は角振動数を  $\omega$ 、屈折率を  $n$ 、波数ベクトルを  $\mathbf{K}$ 、波数ベクトルの向きの単位ベクトルを  $\mathbf{k} = \mathbf{K}/|\mathbf{K}|$  とすれば、次のように表わされます。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \exp\{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} = \mathbf{E}_0 \exp\left\{i\omega \left(\frac{n}{c} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - t\right)\right\} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \exp\{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} = \mathbf{B}_0 \exp\left\{i\omega \left(\frac{n}{c} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - t\right)\right\}\end{aligned}\quad (12)$$

ここで  $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$  は、それぞれの振幅の大きさを持つ一定のベクトルです。

これらをマクスウェル方程式に入れると、次のようになります。

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E} &= i\omega \frac{n}{c} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= i\omega \mathbf{B}\end{aligned}$$

よって

$$\mathbf{B} = \frac{n}{c} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (13)$$

また

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} \\ &= i \frac{\omega}{\mu_0} \frac{n}{c} \mathbf{k} \times \mathbf{B} \\ &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ &= -i\omega \varepsilon_0 \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} E_j \mathbf{e}_i \\ &= -i\omega \mathbf{D}\end{aligned}$$

<sup>\*7</sup> これ以降の議論は光が平面波という前提で成り立ちます。しかし、得られる結果と実験を比べると良く一致していることから、以降の検討から得る結論が実際にも妥当と考えられています。

これより

$$\mathbf{D} = -\frac{n}{\mu_0 c} \mathbf{k} \times \mathbf{B} \quad (14)$$

ここで  $\mathbf{e}_i$  は  $i = x, y, z$  を取り、それぞれの向きの単位ベクトルです。

比誘電率  $\epsilon_r$  がテンソルとなるので、比誘電率テンソルが非対角項を持つ光学的に非等方な物質では電束密度  $\mathbf{D}$  と電場  $\mathbf{E}$  の向きは異なります。ポインティング・ベクトル  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  は  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{H}, \mathbf{B}$  に直交し、(14) 式から  $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{B}$  は  $\mathbf{D}$  と直交しています<sup>\*8</sup>。電場  $\mathbf{E}$  は波面の進行方向  $\mathbf{k}$  と垂直ではないので、横波とはなっていません。

また、波数ベクトルとポインティング・ベクトルで向きが異なることから、波面の進む向きとエネルギーの進む向きも異なります。

図1のように描くと明確になりますが、 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{S}, \mathbf{k}$  は同一平面にあり、 $\mathbf{S}$  と  $\mathbf{k}$  のなす角  $\alpha$  は  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{D}$  がなす角に等しくなっています。

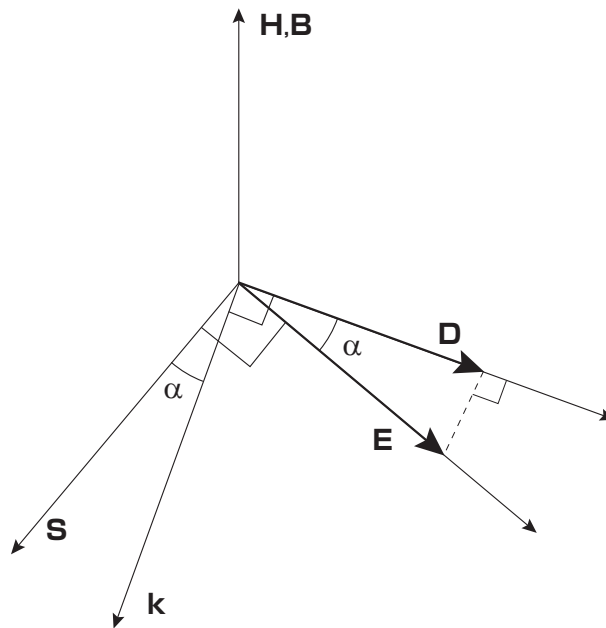


図1:  $\mathbf{S}$  と  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{D}$  のなす角

上で計算したマクスウェル方程式から磁束密度  $\mathbf{B}$  を消して、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{D}$  の関係を見ます。

<sup>\*8</sup> 右辺に負号が付いているので、 $\mathbf{D}$  の向きは図1に書いてある向きになります。

(13) 式 (14) 式から，次のようになります。

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \times \mathbf{B} &= \frac{n}{c} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{n}{c} \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}\} \\ &= \frac{n}{c} (|\mathbf{E}| \sin \alpha \mathbf{k} - \mathbf{E}) \\ &= -\frac{\mu_0 c}{n} \mathbf{D}\end{aligned}$$

よって

$$\mathbf{D} = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} (\mathbf{E} - |\mathbf{E}| \sin \alpha \mathbf{k}) \quad (15)$$

右辺のカッコ内はベクトルの和として，電束密度の方向で大きさ

$$|\mathbf{E} - |\mathbf{E}| \sin \alpha \mathbf{k}| = |\mathbf{E}| \cos \alpha$$

のベクトルとなります (図 1 参照)。

(15) 式を誘電主軸を取る座標系で表わしたとすれば比誘電率  $\epsilon_r$  は対角化されるので，次のように変形できます。

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \frac{n^2}{\mu_0 c^2} (\mathbf{E} - |\mathbf{E}| \sin \alpha \mathbf{k}) \\ &= \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}\end{aligned}$$

$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  より

$$\left(1 - \frac{\epsilon_r}{n^2}\right) \mathbf{E} - |\mathbf{E}| \sin \alpha \mathbf{k} = 0 \quad (16)$$

という関係が導けます。(16) 式から 3.1 節で結晶光学の基本式を導きます。

## 3 複屈折

### 3.1 フレネルの法線方程式

結晶中の光の伝播が物質によってどの様になるのか検討するために，比誘電率  $\epsilon_r$  が，屈折率  $n, n_r$  や真空の透磁率  $\mu_0$  とどのように結びつくのか見ていきます。

まず，あとの考察の為に波数ベクトルを屈折率ベクトルで表わすことを考えます。

$$\mathbf{K} = \frac{\omega n}{c} \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$$

ここで屈折率ベクトルの各成分は、 $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2$  とします<sup>\*9</sup>。 $\mathbf{n}$  は  $\mathbf{k}$  と同じ向きなので、波面の進行方向となります。よって屈折率ベクトルは電磁波がその点で実際に感じる屈折率となっています<sup>\*10</sup>。

また、物質の誘電率と屈折率の関係は、マクスウェル方程式から導かれる電場の波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

から次のように屈折率  $n$  は比誘電率の平方根となります。

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}} \\ n &= \frac{c}{v_p} = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon_r} \end{aligned} \quad (17)$$

これにあわせて、(9) 式にある物質の物性定数である比誘電率  $\varepsilon_r$  を用いて誘電主軸方向それぞれに進んだときの屈折率を次のように表わします。

$$\begin{cases} n_{0x} = \sqrt{\varepsilon_x} \\ n_{0y} = \sqrt{\varepsilon_y} \\ n_{0z} = \sqrt{\varepsilon_z} \end{cases}$$

これらに真空の誘電率  $\sqrt{\varepsilon_0}$  を掛けたものを主屈折率と呼びます。

(16) 式を書き直すと次の式になります。

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_r}{n^2}\right) \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = 0 \quad (18)$$

(18) 式を屈折率ベクトル  $\mathbf{n}$  で書き換えれば次のとおりです。

$$(n^2 - \varepsilon_r) \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = 0 \quad (19)$$

(19) 式が誘電主軸と一致した座標系で書かれているので、 $\varepsilon_r$  は対角化されています。よって、行列形式で表わせば

$$\begin{pmatrix} n_y^2 + n_z^2 - n_{0x}^2 & -n_x n_y & -n_z n_x \\ -n_x n_y & n_z^2 + n_x^2 - n_{0y}^2 & -n_y n_z \\ -n_z n_x & -n_y n_z & n_x^2 + n_y^2 - n_{0z}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (20)$$

<sup>\*9</sup> 今扱っている結晶は「透明」で光を吸収しないので、減衰係数となる屈折率の虚部は 0 とします。

<sup>\*10</sup> 屈折率ベクトル  $\mathbf{n}$  は波面の進む向きを含めて表わしているため、後述の  $(n_{0x}, n_{0y}, n_{0z})$  とは異なります。



となります。ここでの  $\mathbf{E}, \mathbf{n}$  は誘電主軸に一致した座標系での表示となります。(20) 式が自明でない電場の解を持つ必要十分条件は、電場ベクトルにかかる  $3 \times 3$  行列の行列式が 0 になることです。

行列式を展開してまとめると、次のとおりです<sup>\*11</sup>。

$$0 = \left( n_{0x}^2 n_x^2 + n_{0y}^2 n_y^2 + n_{0z}^2 n_z^2 \right) n^2 + n_{0x}^2 n_{0y}^2 n_{0z}^2 - \left\{ n_{0x}^2 \left( n_{0y}^2 + n_{0z}^2 \right) n_x^2 + n_{0y}^2 \left( n_{0z}^2 + n_{0x}^2 \right) n_y^2 + n_{0z}^2 \left( n_{0x}^2 + n_{0y}^2 \right) n_z^2 \right\} \quad (21)$$

(21) 式をフレネルの法線方程式といい、結晶光学での基礎的な式となります。光の進む向きを与えれば、(21) 式は  $n$  についての二次式と見ることができます。 $n$  の二次式なので、 $n$  が重根を持たない限り屈折率  $n$  は 2 つの異なる値を持ち複屈折を起こします。また、(21) 式が  $n$  について解けたときに、その条件で (20) 式を満す 2 つの電場  $\mathbf{E}$  の固有状態がその条件 (光の進行方向) での偏光を示すこととなります<sup>\*12</sup>。この 2 つの偏光を固有偏光といい、それら以外の光は結晶中では進めないことを (21) 式は示しています。

式のイメージが掴みづらいので、具体的に光が進む方向を決めて (21) 式に当てはめてみます。

## 3.2 誘電主軸方向に進む光

$z$  方向に光が進む場合は  $n_x = n_y = 0$  であり  $n_z^2 = n^2$  です。(21) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} 0 &= n_{0z}^2 n_z^4 + n_{0x}^2 n_{0y}^2 n_{0z}^2 - n_{0z}^2 \left( n_{0x}^2 + n_{0y}^2 \right) n_z^2 \\ &= n_{0z}^2 \left( n_z^2 - n_{0x}^2 \right) \left( n_z^2 - n_{0y}^2 \right) \end{aligned} \quad (22)$$

(22) 式を満すには

$$n_z^2 = \begin{cases} n_{0x}^2 \\ n_{0y}^2 \end{cases}$$

です。

一軸性結晶で  $z$  軸が光学軸あれば  $x, y$  方向は光学的に等方性なので  $n_{0x} = n_{0y}$  となり、屈折率は 1 つで複屈折は起きません<sup>\*13</sup>。 $z$  方向に進む電場が  $x, y$  方向の誘電率を感じる

<sup>\*11</sup>  $n_{0x}, n_{0y}, n_{0z}$  は物質によって決まる定数なので、 $n$  と  $(n_x, n_y, n_z)$  を変数と見てまとめています。

<sup>\*12</sup> 固有値  $n$  に属する固有ベクトル  $\mathbf{E}$  ということです。そのため 2 つの固有ベクトル  $\mathbf{E}$  は直交しています。

<sup>\*13</sup> 二乗を解くときに負値も表われますが、屈折率はその物理的意味からは正なはずで、負値は屈折率を波面の進む向きのベクトルとして扱っているため、値の正負は互いに正反対の向きに進んでいることを表わしています。

のは、電場の振動が  $x, y$  方向となっているためです。

このことは (20) 式に  $n_x = n_y = 0, n_z = n_{0x} = n_{0y}$  を代入しても確認できます。(20) 式を計算すれば

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_{0z}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (23)$$

であり、(23) 式が成り立つためには  $E_z = 0$  と電場の  $z$  成分がないことを示しています<sup>\*14</sup>。よって一軸性結晶の光学軸方向にす進む光の電場振動面は、波面の進行方向に対して垂直になっています。これは図 1 で  $\alpha = 0$  となっていることを示しています。

一軸性結晶で  $z$  軸が光学軸ではないとき、例えば  $x$  軸が光学軸のときには  $n_{0x} \neq n_{0y}$  なので、光は  $n_z = n_{0x}$  と  $n_z = n_{0y}$  の 2 つの固有偏光になります。 $n_z = n_{0y}$  の波は (20) 式より

$$\begin{pmatrix} n_{0y}^2 - n_{0x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_{0z}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

となり、 $E_x = E_z = 0, E_y \neq 0$  です<sup>\*15</sup>。電場の振動面が時間的に回転しないので、 $y$  方向に直線偏光していることが分かります。同様に  $n_z = n_{0x}$  の波は、 $E_y = E_z = 0, E_x \neq 0$  で  $x$  方向に直線偏光し、2 つの光の電場振動面は直交しています。

二軸性結晶の場合  $n_{0x} \neq n_{0y} \neq n_{0z}, n_{0x} \neq n_{0z}$  なので 2 つの屈折率を持ち、複屈折を示します。屈折率が 1 つになることはないため、二軸性結晶では誘電主軸は光学軸にならないことが分かります。

$n_z = n_{0y}$  などの計算は既に一軸性結晶の  $n_{0x} \neq n_{0y}$  で示したことと同じなので割愛しますが、この 2 つの光が二軸性結晶で誘電主軸方向を進む光の固有偏光となります。

<sup>\*14</sup> このときの電場の  $x, y$  成分は任意で、(20) 式からは決まりません。

<sup>\*15</sup>  $E_y$  はどのような値でも取り得ますが、 $E_y = 0$  だと「光がない」という自明な解になってしまいます。

### 3.3 2本の誘電主軸が張る平面に沿って進む光

例として光が  $xy$  平面に沿って進んでいる場合を考えます。この時は  $n_z = 0$  となり  $n_x^2 + n_y^2 = n^2$  です。(21)式から

$$\begin{aligned} 0 &= (n_{0x}^2 n_x^2 + n_{0x}^2 n_y^2) (n_x^2 + n_y^2) + n_{0x}^2 n_{0y}^2 n_{0z}^2 - n_{0x}^2 (n_{0x}^2 + n_{0z}^2) (n_x^2 + n_y^2) \\ &= (n_x^2 + n_y^2 - n_{0z}^2) (n_{0x}^2 n_x^2 + n_{0y}^2 n_y^2 - n_{0x}^2 n_{0y}^2) \end{aligned} \quad (24)$$

(24)式を満すには

$$n_x^2 + n_y^2 - n_{0z}^2 = 0 \quad (25)$$

$$n_{0x}^2 n_x^2 + n_{0y}^2 n_y^2 - n_{0x}^2 n_{0y}^2 = 0 \quad (26)$$

のいずれかです。(25)式(26)式が表わす光が固有偏光になります。

(25)式を満す光は  $xy$  平面内のどの方向に進む光でも、屈折率が  $n = n_{0z}$  と一定であることを示しています。このときの電場は(20)式より

$$\begin{pmatrix} n_y^2 - n_{0x}^2 & -n_x n_y & 0 \\ -n_x n_y & n_x^2 - n_{0y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

と  $E_x = E_y = 0, E_z \neq 0$  であり、電場は  $z$  方向に直線偏光しています。

(26)式は

$$\frac{n_x^2}{n_{0y}^2} + \frac{n_y^2}{n_{0x}^2} = 1 \quad (27)$$

とも書けます。(27)式は  $n_{0x} \neq n_{0y}$  ならば楕円を表わしているのです、これを満す光の屈折率  $n$  は原点から楕円上の点までの距離になります。そのため光が進む方向によって屈折率  $n$  が変わります。また電場は(20)式より

$$\begin{pmatrix} n_y^2 - n_{0x}^2 & -n_x n_y & 0 \\ -n_x n_y & n_x^2 - n_{0y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_x^2 + n_y^2 - n_{0z}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

となるので、すぐに  $E_z = 0$  と  $xy$  平面内に直線偏光していることが分かります。また電場振幅  $E_x, E_y$  の比は  $n_y \neq 0$  であれば

$$\frac{E_y}{E_x} = -\frac{n_{0x}^2 n_x}{n_{0y}^2 n_y}$$

となっています。

(25) 式 (26) 式から、2つの誘電主軸が張る面に平行な光は一軸性結晶と二軸性結晶について次のように分かります。

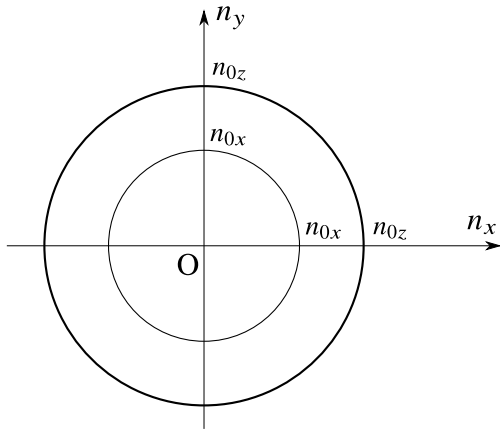
- 一軸性結晶の場合
  - ◆ 光学軸である誘電主軸に垂直な平面を進む光は互いに電場振動面が直交した直線偏光の複屈折を常に示します (図 2a 参照)
  - ◆ 光学軸ではない誘電主軸に垂直な平面を光が進む場合は、光学軸と平行の場合を除き、互いに電場振動面が直交した直線偏光の複屈折を示します (図 2b, 図 2c 参照)
- 二軸性結晶の場合
  - ◆  $n_x, n_y, n_z$  の大小関係によりますが誘電主軸に垂直ないずれかの面で、屈折率  $n$  が1つで複屈折が生じない光の進行方向である光学軸が2つあります (図 2d 参照)
  - ◆ それ以外では、電場振動面が互いに直交した直線偏光の複屈折を示します

光が進む方向について2つの例を見ましたが、(21) 式は一般に  $(n_x, n_y, n_z)$  の直交する三軸が張る空間で屈折率  $n$  を表わす曲面をつくります。 $n_x > n_y > n_z$  として  $n$  が正の領域のグラフを描けば図 3 のようになり、光学的異方性を持つ物質は一般に2つの屈折率曲面を持ちます。

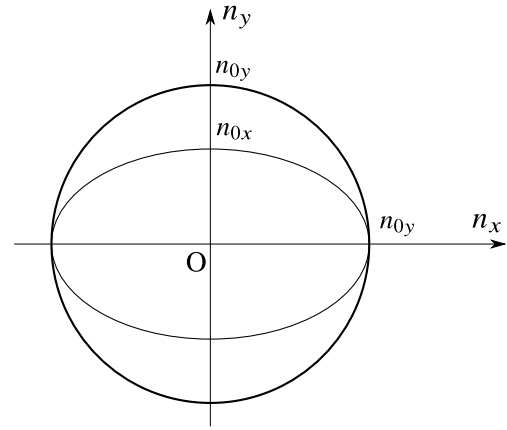
図 3 で原点から光の進む方向へ直線を引いたときの屈折率曲面との交点が屈折率を与え、方向が光学軸と一致しなければ屈折率は2つになり、その各々の電場振動面が互いに直交した直線偏光となっています。

### 3.4 屈折率楕円体

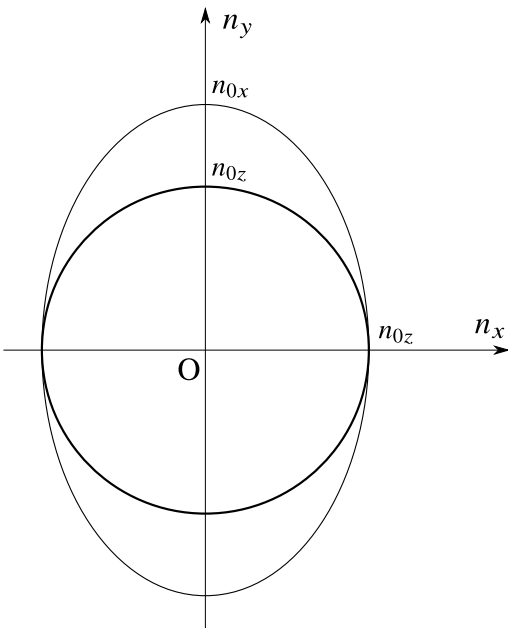
3.3 節では屈折率曲線と屈折率曲面を導きましたが、元となるフレネルの法線方程式 (21) 式が複雑で見通しが良くありませんでした。ここでは波面の進行方向が決まれば、幾何学的にそのときの固有偏光を求められる屈折率楕円体を導入します。



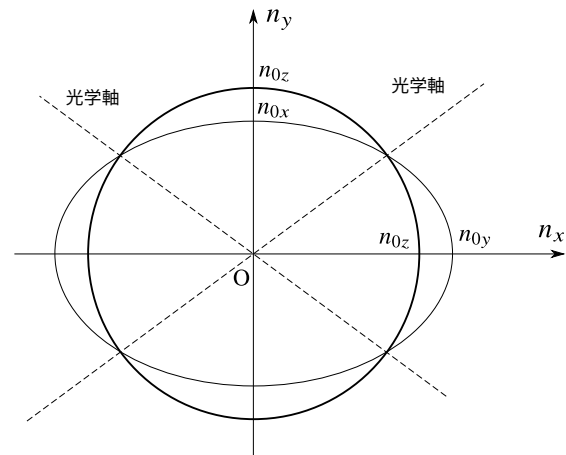
(a) 一軸性結晶で  $z$  軸が光学軸,  $n_{0x} = n_{0y} > n_{0z}$   
常に複屈折が起こる



(b) 一軸性結晶で  $x$  軸が光学軸,  $n_{0x} < n_{0y} = n_{0z}$   
 $n_y = 0$  でのみ屈折率が 1 つ



(c) 一軸性結晶で  $x$  軸が光学軸,  $n_{0x} > n_{0z} = n_{0y}$   
 $n_y = 0$  でのみ屈折率が 1 つ



(d) 二軸性結晶で  $n_{0x} < n_{0z} < n_{0y}$   
 $n$  が等しくなる光学軸が 2 つ

図 2: 誘電主軸の  $xy$  平面を進む光の屈折率曲線 (太線: 常光線, 細線: 異常光線)

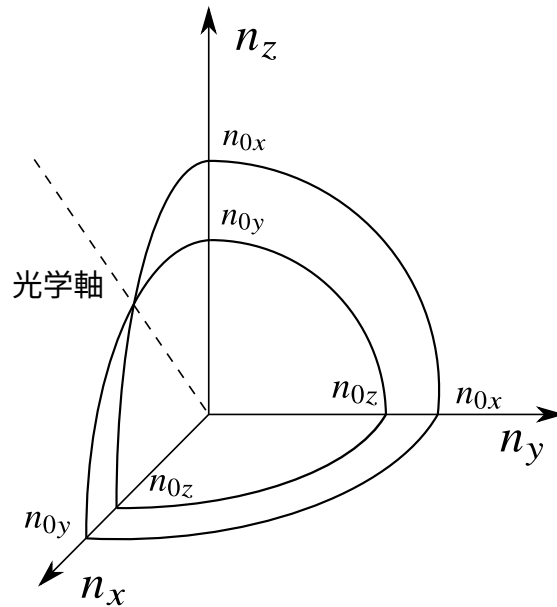


図 3: 屈折率曲面,  $n_x > n_y > n_z$

電束密度  $\mathbf{D}$  は図 1 のように波面の進む向き  $\mathbf{k}, \mathbf{n}$  と直交しているので (19) 式を  $\mathbf{E}$  から  $\mathbf{D}$  へ書き換えて波面と電束密度の関係を導きます。

まず

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$

を逆変換します。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varepsilon_r^{-1} \mathbf{D} \quad (28)$$

ここで  $\varepsilon_r^{-1}$  は  $\varepsilon_r$  の逆テンソルとします。誘電主軸を取った座標系では (9) 式と見比べ

れば

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{0x}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{0y}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_{0z}^2} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (29)$$

であることが分かります。(19) 式より

$$\begin{aligned}0 &= (n^2 - \varepsilon_r) \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ &= (n^2 - \varepsilon_r) \frac{1}{\varepsilon_0} \varepsilon_r^{-1} \mathbf{D} - \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \varepsilon_r^{-1} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n}\end{aligned}$$

$\mathbf{D}$  との内積を取ると

$$0 = \left\{ n^2 (\varepsilon_r^{-1} \mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} - |\mathbf{D}|^2 \right\} - \left\{ (\varepsilon_r^{-1} \mathbf{D}) \cdot \mathbf{n} \right\} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D})$$

$\mathbf{D}$  と  $\mathbf{n}$  は直交するので

$$\begin{aligned}\frac{|\mathbf{D}|^2}{n^2} &= \left( \frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \right) \\ &= \left( \frac{D_x^2}{n_{0x}^2} + \frac{D_y^2}{n_{0y}^2} + \frac{D_z^2}{n_{0z}^2} \right)\end{aligned}\quad (30)$$

ここで、電束密度の大きさ  $|\mathbf{D}|$  を  $n$  で規格化し、次のように変数を取り直します。誘電主軸の座標系で目盛りを変えていますが、向きは変えていない (= 座標系は誘電主軸と一致) ことに注意してください。

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{n} \\ y = \frac{D_y}{n} \\ z = \frac{D_z}{n} \end{cases}\quad (31)$$

すると (30) 式は

$$\frac{x^2}{n_{0x}^2} + \frac{y^2}{n_{0y}^2} + \frac{z^2}{n_{0z}^2} = 1\quad (32)$$

となります。(32) 式は  $xyz$  空間での楕円体の表面を表わしています。図 4 には任意の方向  $\mathbf{n}$  に進む光も書き加えています。このときの 2 つの固有偏光の電束密度  $\mathbf{D}'$ ,  $\mathbf{D}''$  の偏光

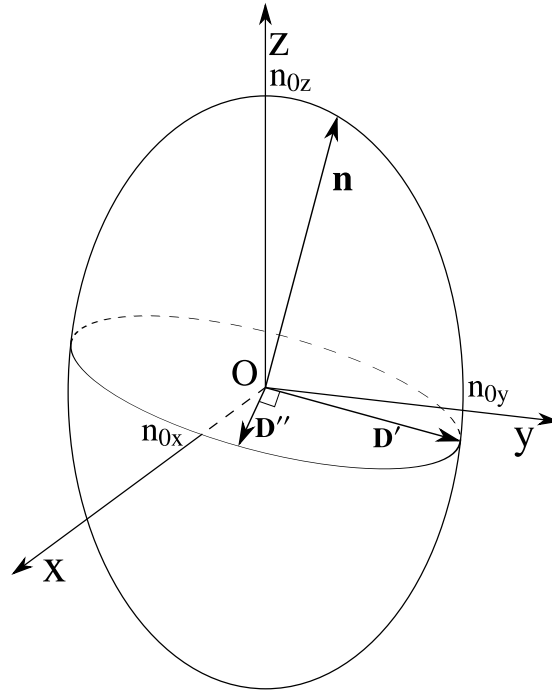


図 4: 屈折率楕円体,  $\mathbf{n}$  は屈折率ベクトル,  $\mathbf{D}'$ ,  $\mathbf{D}''$  は固有偏光の電束密度

方向とそれぞれの屈折率は図形的に次のように求められます。

原点  $O$  を通り  $\mathbf{n}$  に垂直な平面を描き、平面が楕円体を切る切り口の形状に着目します。切り口は楕円形になり  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{D}$  は直交するので、2 つの固有偏光の電束密度  $\mathbf{D}'$ ,  $\mathbf{D}''$  はこの面上にあります。電束密度の偏光方向は楕円の原点から長軸方向、短軸になります。屈折率は図 4 に記入したようにそれぞれの電束密度の長さ (長軸の  $1/2$ , 短軸の  $1/2$ ) となります。

このように表わされることを計算で確認します。屈折率楕円体を求めた座標系  $xyz$  は誘電主軸を取った直交座標系でした。この  $z$  軸を光の進行方向  $\mathbf{n}$  に合せるように座標変換をします。変換後の座標系を  $x'y'z'$  とすれば  $\mathbf{D}'$  と  $\mathbf{n}$  は直交しているので、 $D'_z = 0$  であり  $D'_x, D'_y$  は  $\mathbf{n}$  に垂直な面内にあります。よってここからは  $D'_x, D'_y$  についてのみ考えます。電場と電束密度の関係式である (15) 式が  $x'y'z'$  系で取られているとして (28) 式を使い  $\mathbf{E}'$  を  $\mathbf{D}'$  で表わします。添字が煩雑になるので  $\epsilon_r^{-1'} = a'$  と書くことにします。

$$\mathbf{D}' = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} \left[ \frac{1}{\epsilon_0} a' \mathbf{D}' - \left\{ \frac{1}{\epsilon_0} (a' \mathbf{D}') \cdot \mathbf{n} \right\} \mathbf{n} \right] \quad (33)$$



$\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$  なので

$$\begin{aligned} &= n^2 a' \begin{pmatrix} D'_x \\ D'_y \end{pmatrix} \\ &= n^2 \begin{pmatrix} a'_{xx} & a'_{xy} \\ a'_{yx} & a'_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D'_x \\ D'_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

ただし、ここでは  $D'_z = 0$  が分かっているので  $\mathbf{D}'$  は  $x'y'$  要素だけとし、それに伴い  $a'$  も  $2 \times 2$  の行列となっています。また (33) 式の右辺第二項は  $\mathbf{D}'$  の  $\mathbf{n}$  方向成分 =  $z'$  成分となるので 0 となります。誘電率テンソルは  $2 \times 2$  の行列にしても対称行列となっている<sup>\*16</sup>ので (34) 式の  $D'_x, D'_y$  にかかる逆行列も対称行列となっており対角化できます。対角化 ( $\mathbf{D}'$  に対する主軸変換) し改めてそれを  $x'y'z'$  系とすれば

$$\mathbf{D}' = n^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon'_{rx} & 1 \\ 0 & \varepsilon'_{ry} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D'_x \\ D'_y \end{pmatrix} \quad (35)$$

と書けることとなります。ここで  $\varepsilon'_{ri}, i = x, y$  は (主軸を取った後の)  $x'y'z'$  系での主誘電率となります。(35) 式はベクトルの大きさを見れば楕円の式になっています。比誘電率  $\varepsilon'_r$  を (17) 式にならって屈折率に書き換えます。

$$\sqrt{\varepsilon'_{rx}} = n'_x$$

などと書き換えれば

$$\frac{|\mathbf{D}'|^2}{n^2} = \frac{D'^2_x}{n'^2_x} + \frac{D'^2_y}{n'^2_y} \quad (36)$$

(36) 式は屈折率楕円体を、原点を通り  $\mathbf{n}$  の垂直な面で切ったときの断面の周が楕円となることを示しています。(31) 式と同じ変数変換することで、長軸短軸方向がそれぞれ電束密度の偏光方向を表わし、その屈折率 (位相速度  $v_p$  に対する屈折率) は長軸短軸の  $1/2$  となっているという上で説明した幾何学的な方法が確認できました。

<sup>\*16</sup> このことはエネルギー保存則 (7) 式からの結論なので、電場の有無に関係なく成り立ちます。

---

## 4 ポッケルス効果

### 4.1 ポッケルスセルの概要

前節までで結晶中の光を記述する方程式であるフレネルの法線方程式 (21) 式を導き、その性質を見てきました。その結果から (比) 誘電率テンソルの主屈折率が複屈折の元となっていることが分かりました。また複屈折の屈折率や偏光方向を幾何学的に求められる屈折率楕円体についても見てきました。ここからは一次の電気光学効果と呼ばれるポッケルス効果について、これまでの知識をもとに検討していきます。

電気光学効果はサンプルに電場を印加することで屈折率が変化するという効果です。実験で使用するサンプルは屈折率の変化が電場の強さに比例 ( $|\mathbf{E}|$  に比例) するので、一次の電気光学効果と呼ばれます。屈折率が変化するので (比) 誘電率からポッケルス効果を説明できます。このことを以下に見ていきます。

実験で使用するポッケルスセル<sup>\*17</sup>は一軸性結晶の  $\text{LiNbO}_3$  を使用しています。 $\text{LiNbO}_3$  の屈折率は  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  で  $n_o = 2.29, n_e = 2.20$  なので  $\Delta = n_e - n_o = -0.09$  と負結晶に分類されます<sup>\*18</sup>。実験では  $y$  軸に沿って光が進むので 3.4 節のようにわざわざ伝播方向に軸を合わせることもなく、 $xz$  平面の断面が屈折率楕円体の断面になります。図 5 に示したように、負結晶のため屈折率楕円体の断面である楕円の短軸の  $1/2$  が異常光線の屈折率で、長軸の  $1/2$  が常光線屈折率です。

本実験のポッケルスセルは光学軸方向に電場を印加し、入射光は集光してセル入射面に入ります。しかしポッケルス効果を簡便に見るために、ここでは入射光は光学軸に垂直に入射し・透過するとします。また外部電場の方向と光線方向が垂直な配置を横配置と呼んでいます<sup>\*19</sup>。図 6 が概略図で、 $z$  軸が光学軸になり屈折率楕円体の断面を書き加えています。 $n_o$  が常光線の屈折率で  $n_e$  が異常光線屈折率になります。またそれぞれの方向は直線偏光した偏光面を示し、この 2 つの光が固有偏光となります。

### 4.2 電場が誘電率に与える影響

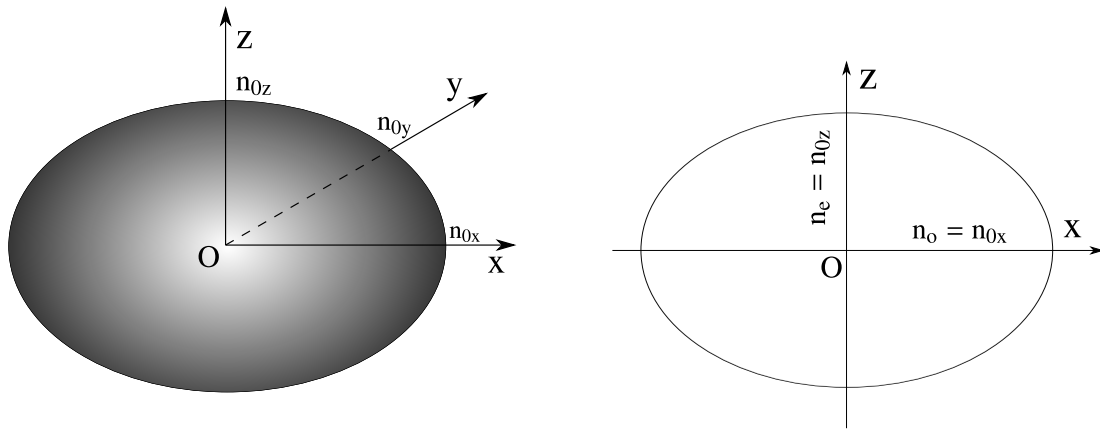
外部電場を印加することで結晶を構成する分子の電子配置に変化が生じ、誘電率テンソルにも変化が表われると期待できます。これを見ていきますが、外場による変化は慣習的

---

<sup>\*17</sup> ポッケルス効果を利用するために結晶に電極などを取り付けてあるモジュールをこのように呼びます。

<sup>\*18</sup> 正結晶は  $n_e > n_o$  で図 2c の屈折率曲線になります。

<sup>\*19</sup> なので縦配置と呼ばれる電場と光線方向が同一なモジュールもあります。



(a) ポッケルスセルの  $\text{LiNbO}_3$  の屈折率楕円体  
z 軸が光学軸で  $n_{0x} = n_{0y} > n_{0z}$  の負結晶

(b) ポッケルスセルの  $\text{LiNbO}_3$  の屈折率楕円体断面  
y 軸に平行な光が進む場合

図 5:  $\text{LiNbO}_3$  の屈折率楕円体と y 軸に平行な光が進むときの断面

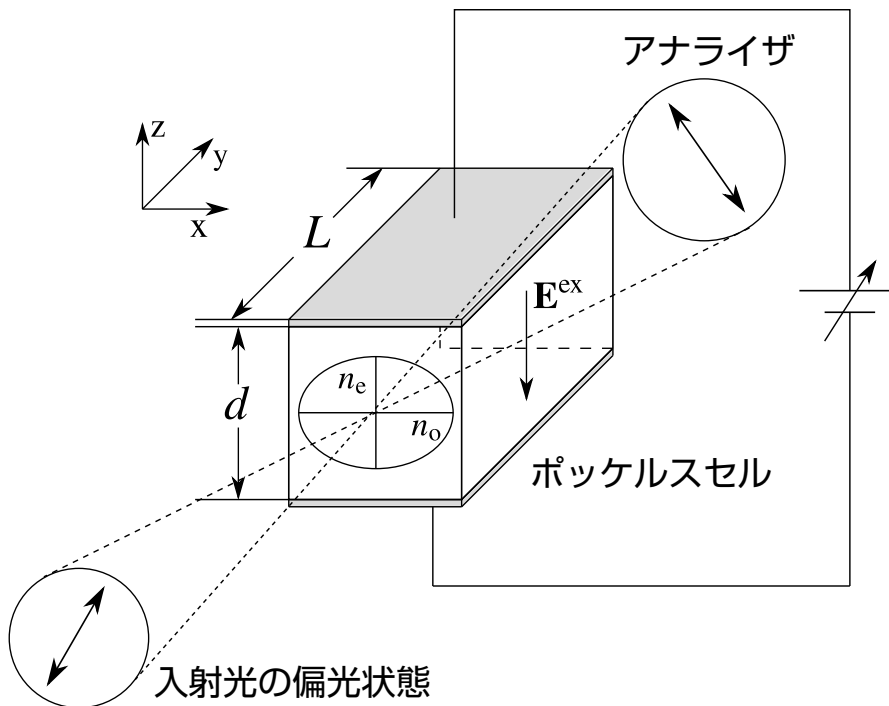


図 6: ポッケルスセルの概略

$n_0$  は常光線屈折率,  $n_e$  は異常光線屈折率,  $E^{\text{ex}}$  は外部電場,  $L$  はセルの光線方向の長さ

に逆誘電率テンソルを持ちいて議論されるので、それに合わせます。

外部電場がないときの逆誘電率テンソルは、外場がないということを明示するために肩に (0) をつけることにします。よって

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{pmatrix} a_{xx}^{(0)} & a_{xy}^{(0)} & a_{xz}^{(0)} \\ a_{yx}^{(0)} & a_{yy}^{(0)} & a_{yz}^{(0)} \\ a_{zx}^{(0)} & a_{zy}^{(0)} & a_{zz}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \quad (37)$$

となります。

外部電場の逆比誘電率に与える影響は外部電場の大きさの一次まで取れば、一般的には次のように表わせます。

$$a_{ij} = a_{ij}^{(0)} + \sum_k r_{ijk} E_k^{\text{ex}}$$

ここで  $E_k^{\text{ex}}$  は外部電場の各成分、 $r_{ijk}$  は逆比誘電率テンソルの各成分に対する電場各成分の影響の大きさを表わしている 3 階のテンソルになります。

逆比誘電率テンソルは対称なので

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij}^{(0)} + \sum_k r_{ijk} E_k^{\text{ex}} \\ &= a_{ji} \\ &= a_{ji}^{(0)} + \sum_k r_{jik} E_k^{\text{ex}} \end{aligned}$$

電場がないときの項が等しいのは明らかなので

$$\sum_k r_{ijk} E_k^{\text{ex}} = \sum_k r_{jik} E_k^{\text{ex}}$$

が任意の電場に対して成り立つことから

$$r_{ijk} = r_{jik} \quad (38)$$

が必要です。3 階のテンソルの成分は 27 個ですが、(38) 式より 18 個の成分が独立なこと

が分かります。同じ成分になる添字の組を次のように表記します。

$$\left\{ \begin{array}{l} xx = 1 \\ yy = 2 \\ zz = 3 \\ yz = zy = 4 \\ zx = xz = 5 \\ xy = yx = 6 \end{array} \right.$$

よって逆比誘電率テンソルは次に定義する  $b$  の 2 番目の添字  $j$  が  $j = 1, 2, 3$  のいずれかを取るとすれば (但し  $x \rightarrow 1, y \rightarrow 2, z \rightarrow 3$  という表記)

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{1j} = a_1^{(0)} + r_{1j} E_j^{\text{ex}} \\ \quad = a_{xx}^{(0)} + r_{xxj} E_j^{\text{ex}} \end{array} \right. \quad (39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{4j} = a_4^{(0)} + r_{4j} E_j^{\text{ex}} \\ \quad = a_{yz}^{(0)} + r_{yzj} E_j^{\text{ex}} = a_{zy}^{(0)} + r_{zyj} E_j^{\text{ex}} \end{array} \right. \quad (40)$$

などを書くことで  $b$  の  $6 \times 3$  の行列として表現できます。このときの  $r_{ij}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, j = 1, 2, 3$  を電気光学定数 (EO 定数) テンソルと呼び、その結晶の対称性 (群論, 点群) から (38) 式で見た条件以外にも決定できる等しい成分や 0 になる成分などが分かります。LiNbO<sub>3</sub> では  $r$  の  $6 \times 3$  の成分<sup>\*20</sup>は次のとおりです。

$$r = \begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

今, 実験と同じ  $z$  軸に外部電場をかければ

$$\mathbf{E}^{\text{ex}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E^{\text{ex}} \end{pmatrix} \quad (42)$$

\*20 LiNbO<sub>3</sub> は  $3m$  という点群です。

(39) 式 (40) 式に従って  $b$  を愚直に書き下し (41) 式 (42) 式を使えば

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(0)} + r_{11}E_1^{\text{ex}} & r_{12}E_2^{\text{ex}} & r_{13}E_3^{\text{ex}} \\ r_{21}E_1^{\text{ex}} & a_2^{(0)} + r_{22}E_2^{\text{ex}} & r_{23}E_3^{\text{ex}} \\ r_{31}E_1^{\text{ex}} & r_{32}E_2^{\text{ex}} & a_3^{(0)} + r_{33}E_2^{\text{ex}} \\ r_{41}E_1^{\text{ex}} & r_{42}E_2^{\text{ex}} & r_{43}E_3^{\text{ex}} \\ r_{51}E_1^{\text{ex}} & r_{52}E_2^{\text{ex}} & r_{53}E_3^{\text{ex}} \\ r_{61}E_1^{\text{ex}} & r_{62}E_2^{\text{ex}} & r_{63}E_3^{\text{ex}} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_1^{(0)} & 0 & r_{13}E^{\text{ex}} \\ 0 & a_2^{(0)} & r_{13}E^{\text{ex}} \\ 0 & 0 & a_3^{(0)} + r_{33}E^{\text{ex}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となります。  $a$  に戻せば

$$a = \begin{pmatrix} a_1^{(0)} + r_{13}E^{\text{ex}} & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{(0)} + r_{13}E^{\text{ex}} & 0 \\ 0 & 0 & a_3^{(0)} + r_{33}E^{\text{ex}} \end{pmatrix} \quad (43)$$

となります。(43) 式の逆比誘電率テンソルを実際のセルの配置に対応する 2 つの固有偏光の電束密度に作用させることで、どのようなことが起こるか検討できます。

### 4.3 z 軸が偏光方向の光

$y$  方向に進む  $z$  軸方向に偏光した光の電束密度を  $\mathbf{D}_{zy}$  と書けば

$$\mathbf{D}_{zy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_{zy} \end{pmatrix}$$

なので、逆誘電率テンソルとして (43) 式を (37) 式に入れれば

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{a} \mathbf{D} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (a_3^{(0)} + r_{33} E^{\text{ex}}) D_{zy} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって光電場  $\mathbf{E}$  は z 成分のみで、これを  $E$  とし

$$D_{zy} = \frac{\varepsilon_0}{a_3^{(0)} + r_{33} E^{\text{ex}}} E$$

$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$  と読みなおせば屈折率は (17) 式より

$$\begin{aligned}n &= \sqrt{\varepsilon_r} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_3^{(0)} + r_{33} E^{\text{ex}}}}\end{aligned}\tag{44}$$

外部電場  $E^{\text{ex}}$  の影響が小さい ( $r_{33} E^{\text{ex}} \ll a_3^{(0)}$ )<sup>21</sup> として (44) 式を  $E^{\text{ex}}$  の一次まで展開すれば

$$n \approx \frac{1}{\sqrt{a_3^{(0)}}} \left( 1 - \frac{r_{33}}{2a_3^{(0)}} E^{\text{ex}} \right)\tag{45}$$

です。 $a_i^{(0)}$  は本実験の光の進行方向では主誘電率の逆数 ((29) 式参照) なので、それぞれ主屈折率を使って表わせます。

$$\begin{aligned}a_1^{(0)} &= a_2^{(0)} = \frac{1}{n_{0x}^2} = \frac{1}{n_{0y}^2} \\ a_3^{(0)} &= \frac{1}{n_{0z}^2}\end{aligned}$$

また、セルに加わる外部電場  $E^{\text{ex}}$  は平行板電極間の電場となるので

$$E^{\text{ex}} = \frac{V}{d}$$

<sup>21</sup> LiNbO<sub>3</sub> の電気光学係数は  $r_{33} \approx 30 \text{ pm V}^{-1}$ ,  $r_{13} \approx 10 \text{ pm V}^{-1}$  であり印加する外部電場は数百  $\text{kV m}^{-1}$  なので、 $r_{33} E^{\text{ex}}$  は屈折率  $a_3^{(0)} = n_e = 2.20$  と比べると 5 桁程度小さくなります。

ここで  $V$  は印加電圧で  $d$  は電極間距離です。よって (45) 式は

$$n \approx n_{0z} - \frac{n_{0z}^3 r_{33}}{2} E^{\text{ex}} = n_{0z} - \frac{n_{0z}^3 r_{33}}{2d} V \quad (46)$$

と  $y$  方向に進む  $z$  軸方向に偏光した光の屈折率は外部電場の強さ (印加電圧) に比例しることが分かります。

屈折率が変わるので、セルを通過した光は外部電場がないときと比べて位相が変化することになります。セル長は  $L$  なので通過したあとは平面波の式 (12) 式より位相部分のみ取り出せば

$$\begin{aligned} \exp\left\{i\omega \frac{n}{c} L\right\} &= \exp\left\{i\frac{\omega}{c} \left(n_{0z} - \frac{n_{0z}^3 r_{33}}{2} E^{\text{ex}}\right) L\right\} \\ &= \exp\left\{i\frac{\omega}{c} n_e L\right\} \exp\left\{-i\frac{\omega}{c} \frac{n_e^3 r_{33} E^{\text{ex}}}{2} L\right\} \end{aligned} \quad (47)$$

ここでは  $n_{0z} \rightarrow n_e$  と異常光線屈折率であることを明示しています。印加電圧による屈折率の変化量を  $\Delta n$  とすれば

$$\Delta n = -\frac{n_e^3 r_{33}}{2} E^{\text{ex}} = -\frac{n_e^3 r_{33}}{2d} V$$

であり (47) 式は

$$\exp\left\{i\frac{\omega}{c} (n_e + \Delta n) L\right\}$$

であり、外部電場がないときの光に対する位相差  $\Delta\phi$  は

$$\Delta\phi = -\frac{\omega}{c} \frac{n_e^3 r_{33}}{2d} VL$$

になります。また  $E^{\text{ex}} = 0$  のときは元々の主屈折率  $n_{0z} = n_e$  になります。これは印加電圧によって屈折率が変わるので、光の位相を制御することが可能なことを示しています。

#### 4.4 $x$ 軸が偏光方向の光

$y$  方向に進む  $x$  軸方向に偏光した光の電束密度  $D_{xy}$  は

$$\mathbf{D}_{xy} = \begin{pmatrix} D_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



なので (43) 式より

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} a \mathbf{D} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{pmatrix} (a_1^{(0)} + r_{13} E^{\text{ex}}) D_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります。4.3 節と同様に ( $r_{13} E^{\text{ex}} \ll a_1^{(0)}$ ) として屈折率は求まり、次のように外部電場の大きさに比例することが分かります。

$$n \approx n_{0x} - \frac{n_{0x}^3 r_{13}}{2} E^{\text{ex}} = n_{0x} - \frac{n_{0x}^3 r_{13}}{2d} V \quad (48)$$

外部電場がないときの光に対する位相差  $\Delta\phi$  は

$$\Delta\phi = -\frac{\omega}{c} \frac{n_o^3 r_{13}}{2d} VL$$

となります。ここでは  $n_{0x} \rightarrow n_o$  と常光線屈折率で表わしています。x 軸が偏光方向の光でも  $E^{\text{ex}} = 0$  では主屈折率  $n_{0x} = n_o$  になります。z 軸方向に偏光した光と同じように、印加電圧によって屈折率が変化することで位相制御が可能です。印加電圧に対する屈折率の変動係数 ( $n_o^3 r_{13}$  に比例) が z 軸方向の偏光とは異なるので、位相変化は偏光状態にも依存することが分かります。

## 4.5 2つの固有偏光の位相差

セル内の固有偏光は偏光軸が z 軸のものと x 軸の 2 つなので z 軸に対し傾いた入射光では 2 つの固有偏光に分離します。セルへの入射時には 1 つの光だったので、セルを通過する間に速度差から位相差が生じることになります。平面波の空間振動部分のみ取り出せば、セル長  $L$  進んだあとの位相は (46) 式 (48) 式より

$$\begin{cases} z \text{ 軸方向の偏光: } \phi_e = \frac{\omega}{c} \left( n_e - \frac{n_e^3 r_{33}}{2d} V \right) L \\ x \text{ 軸方向の偏光: } \phi_o = \frac{\omega}{c} \left( n_o - \frac{n_o^3 r_{13}}{2d} V \right) L \end{cases}$$

$z$  軸方向の偏光と  $x$  軸方向の偏光の位相差  $\Delta\phi$  は

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \phi_o - \phi_e \\ &= \frac{\omega L}{c} \left\{ (n_o - n_e) + \left( n_o^3 r_{13} - n_e^3 r_{33} \right) \frac{V}{2d} \right\}\end{aligned}\quad (49)$$

となります。(49) 式の右辺第一項は外部電場がなくても生じている位相差 (自然複屈折による位相差) で、第二項が印加電圧により変化する位相差になっています。

ポッケルス効果の大きさを示す指標として位相差を  $\pi$  遅らせる半波長電圧  $V_\pi$  があります。(49) 式より半波長電圧は

$$\begin{aligned}V_\pi &= \frac{2\pi cd}{\omega L (n_o^3 r_{13} - n_e^3 r_{33})} \\ &= \frac{\lambda d}{L (n_o^3 r_{13} - n_e^3 r_{33})}\end{aligned}\quad (50)$$

であり、(50) 式に本実験でのパラメータ<sup>\*22</sup>を入れて見積もると

$$|V_\pi| \approx 320 \text{ V}$$

になります<sup>\*23</sup>。(49) 式より明らかなように電圧の変化が  $V_\pi$  毎に位相が  $\pi$  ずれて、位相のずれの正負は電圧  $V$  の符号によります。なお常光線と異常光線の偏光面は直交しているので、5章で考えるように偏光板を通過させて常光線と異常光線の偏光面を一致させないと干渉は起きません。

実験に使用しているポッケルスセルは長さ (入射面に垂直な光の進行する長さ) は  $L = 20 \text{ mm}$  で、He-Ne レーザー波長  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  での光路差  $\Delta = L(n_o - n_e)$  はおよそ  $2800\lambda$  程度になります。厳密に光路差  $\Delta$  を波長の整数倍に加工するのは難しく、電圧無印加時の光路差は波長の非整数倍となっています。そのため半波長電圧  $V_\pi$  の測定には外部電圧を印加し、一度光路差が波長の整数倍となった電圧から光路差が更に半波長増減するまでの電圧の差を測定します。光路差が半整数になったことがどのように判定できるかは5章で確認します。

<sup>\*22</sup> LiNbO<sub>3</sub> 結晶断面積：  $2 \times 2 \text{ mm}^2$ , 結晶長さ：  $L = 20 \text{ mm}$ , 一般的な EO 定数  $r_{13} \approx 10 \text{ pm V}^{-1}$ ,  $r_{33} \approx 30 \text{ pm V}^{-1}$

<sup>\*23</sup> 結晶の組成により EO 定数に幅があるため、およその値として見てください。

## 5 実験で生じる干渉縞

### 5.1 入射面での偏光面の傾き

実験で使用するレーザー光源は直線偏光しています。偏光方向が光学軸に対してある角度でセルに入射し、 $x$  軸  $z$  軸に電束密度が偏光した固有偏光でセル内を通ります。セル通過後に偏光板を通ることで2つの偏光が再合成されて位相差により干渉します。このことを順を追って数学的に確認します。

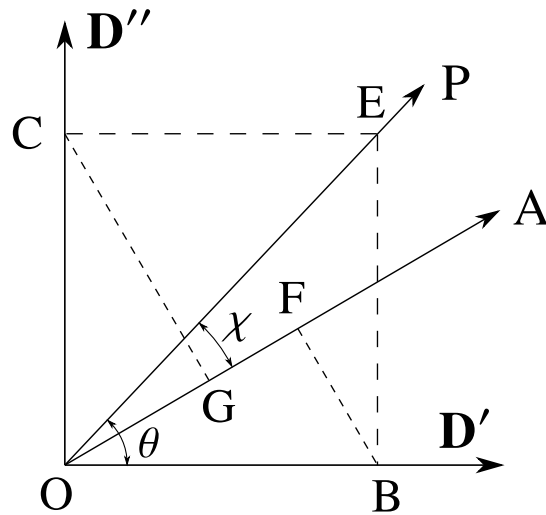


図 7: 2つの固有偏光による干渉の計算

P は入射光の電場振動, A はアナライザ偏光方向

入射光の直線偏光が  $x$  軸から  $\theta$  傾き (P 方向), セル通過後のアナライザ (偏光板) が入射光の偏光から  $\chi$  傾く (A 方向) 配置とします。セル内では入射光の振幅  $E$  は OB と OC で2つの固有偏光に分かれます。

$$OB = E \cos \theta$$

$$OC = E \sin \theta$$

セル通過後アナライザを通ると振幅はそれぞれ次のようになります。

$$OB \rightarrow OF = E \cos \theta \cos(\theta - \chi) \equiv E_1 \quad (51)$$

$$OC \rightarrow OG = E \sin \theta \sin(\theta - \chi) \equiv E_2 \quad (52)$$

アナライザ通過後の光の強度は振幅の二乗で与えられるので、 $I_1 = E_1^2, I_2 = E_2^2$  と書けば

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi \quad (53)$$

ここで  $\Delta\phi$  は偏光の2つの屈折率  $n'', n'$  による位相差

$$\Delta\phi = \frac{\omega}{c}(n'' - n')L$$

になります。(53) 式に (51) 式 (52) 式を入れれば

$$I = E^2 \left[ \{\cos \theta \cos(\theta - \chi)\}^2 + \{\sin \theta \sin(\theta - \chi)\}^2 + 2 \cos \theta \cos(\theta - \chi) \sin \theta \sin(\theta - \chi) \cos \Delta\phi \right]$$

であり  $\cos \Delta\phi = 1 - 2 \sin^2(\Delta\phi/2)$  を使うと

$$I = E^2 \left[ \{\cos \theta \cos(\theta - \chi) + \sin \theta \sin(\theta - \chi)\}^2 - 4 \cos \theta \cos(\theta - \chi) \sin \theta \sin(\theta - \chi) \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right] \quad (54)$$

となります。

(54) 式の右辺大括弧内第一項は

$$\begin{aligned} & \{\cos \theta (\cos \theta \cos \chi + \sin \theta \sin \chi) + \sin \theta (\sin \theta \cos \chi - \cos \theta \sin \chi)\}^2 \\ &= \left\{ \cos \chi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \right\}^2 \\ &= \cos^2 \chi \end{aligned}$$

となり、右辺大括弧内第二項は

$$\begin{aligned} & -4 \cos \theta \cos(\theta - \chi) \sin \theta \sin(\theta - \chi) \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \\ &= -4 \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right) \left(\frac{\sin 2(\theta - \chi)}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \\ &= -\sin 2\theta \sin 2(\theta - \chi) \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \end{aligned}$$

です。まとめれば

$$I = E^2 \left\{ \cos^2 \chi - \sin 2\theta \sin 2(\theta - \chi) \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \right\} \quad (55)$$

となります。ここでの議論は入射光が入射面に垂直に入射する場合だけでなく、任意の傾きで入射する場合でも同様に成り立ちます。

(55) 式は  $\theta, \chi$  の 2 つの角度パラメータを含んでいます。実験と同じくアナライザが入射光の偏光と直交した状態 ( $\chi = \pi/2$ ) を考えます。(55) 式に  $\chi = \pi/2$  を入れれば

$$I = E^2 \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta\phi}{2} \right) \quad (56)$$

です。

(56) 式が  $I = 0$  となる条件、つまり暗線の条件は

$$I = 0 \rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{m}{2}\pi & (57) \\ \Delta\phi = 2m\pi & (58) \end{cases}$$

で、 $m = 1, 2, 3, \dots$  です。(57) 式の条件はセル長  $L$  やセルへの印加電圧  $V$  には依存せず、(58) 式の条件は  $L, V$  に依存することが分かります。

入射光の直線偏光角度  $\theta$  が (57) 式の条件になる暗部をアイソジャイアと呼んでいます。アイソジャイアによる暗部 (暗線) はアナライザの偏光角度によらず、2 つの偏光の電束密度ベクトル振動方向に十字線状の暗線を形成し、これは光学軸に平行/垂直となります<sup>24</sup>。

## 5.2 入射角と屈折角

結晶の光学的性質を観察するときコノスコープ像と呼ばれる干渉像を観察する手法があります。アイソジャイアは入射光の偏光角度だけで決まり、入射角や屈折率  $n_o, n_e$  には依存しなかったため、干渉縞にはアイソジャイアの暗部が干渉縞に重なることとなります。実験では偏光顕微鏡で観察するコノスコープ像と同様の干渉像をスクリーンに投影するために、図 8 に示すセットアップをしています。2 の対物レンズでレーザー光が拡散し、3 の凸レンズにより 4 のポッケルスセル表面に焦点を結ぶようになります。その先でまた光は広がり、セルを通過後 5 の偏光フィルターを通して 6 のスクリーンに像を投影します。このとき偏光フィルターは入射光の直線偏光と直交する角度に調節します。

この状況を図 9 に示しています。入射光 SA は A 点で複屈折により AB', AB'' に分かれます。入射角が  $\varphi_1$  で、屈折角が複屈折の屈折率  $n'$  と  $n''$  に対応しそれぞれ  $\varphi'_2, \varphi''_2$  とします。

<sup>24</sup> 一軸性結晶の固有偏光は、電束密度ベクトルの振動面が光学軸に平行と垂直の 2 つだったことを思い出してください。

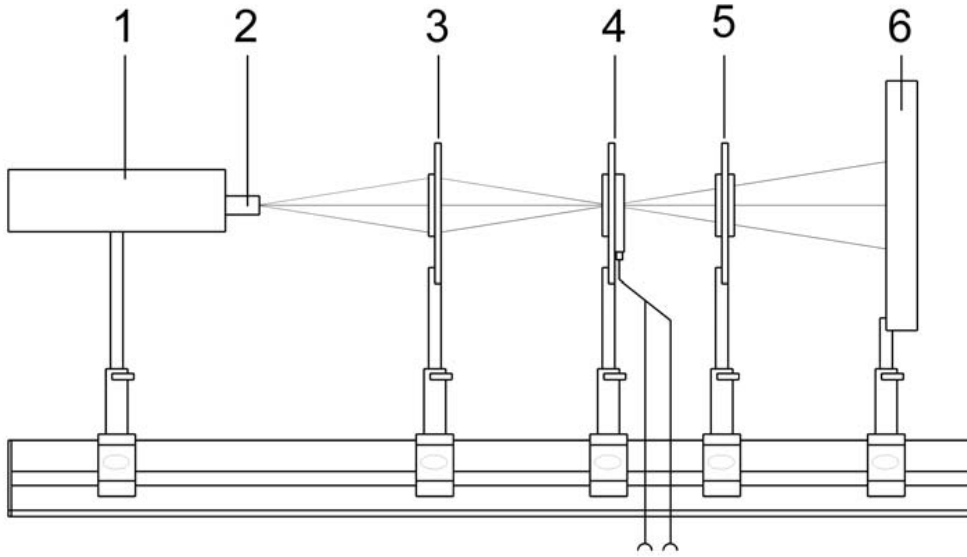


図 8: 実験のセットアップ

- 1: He-Ne レーザー, 2: 拡散用対物レンズ, 3: 凸レンズ, 4: ポッケルスセル  
5: 偏光フィルター (アナライザ), 6: 投影スクリーン

ここでポッケルスセルには収束光が入射するので、点 A が全ての光の入射点と仮定します。実際には点 A での光は広がりを持っているはずですが、それを小さいとし広がりを無視するという仮定です。また屈折率  $n'$  と  $n''$  は入射する光がセル表面に対して傾きを持つので、 $n'$  と  $n''$  の具体的な表式が不明であることに注意してください。 $n'$  と  $n''$  は 5.3 節で求めます。

セルから出る 2 つの光は A 点とは屈折率が逆数になるので平行となります。L はポッケルスセルの長さを表わします。それぞれの屈折率での波長は  $\lambda' = \lambda/n'$ ,  $\lambda'' = \lambda/n''$  (但し  $\lambda$  は真空中の波長) とすれば、2 つの光の位相差  $\Delta\phi$  は次のようになります。

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 2\pi \left( \frac{AB'}{\lambda'} + \frac{B'C}{\lambda} - \frac{AB''}{\lambda''} \right) \\ &= \frac{2\pi L}{\lambda} \left\{ \frac{n'}{\cos \varphi'_2} + (\tan \varphi''_2 - \tan \varphi'_2) \sin \varphi_1 - \frac{n''}{\cos \varphi''_2} \right\} \end{aligned}$$

屈折率から  $n' \sin \varphi'_2 = \sin \varphi_1$  であり  $n''$  についても同様なので

$$\Delta\phi = \frac{2\pi L}{\lambda} (n' \cos \varphi'_2 - n'' \cos \varphi''_2) \quad (59)$$

となります。通常  $n' - n'' \ll 1$  なので (59) 式を近似します。 $\varphi'_2$  は  $n'$  が決まることで決

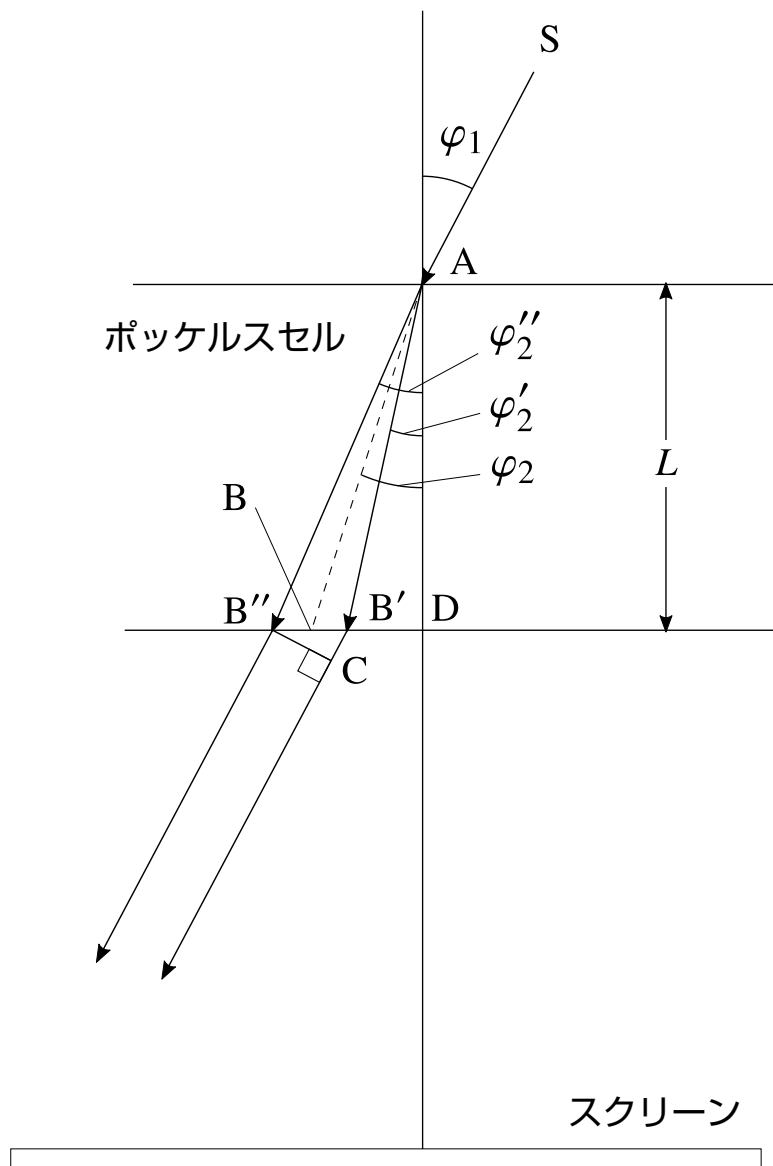


図 9: 光の入射角と複屈折の屈折角 (屈折角は誇張して書かれています)

まり,  $\varphi_2''$  は  $n''$  が決まれば決まります<sup>\*25</sup>。よって (59) 式の括弧内各項を

$$f(n) = n \cos \varphi_2(n)$$

と  $n$  を変数とする関数と見ます。わずかに  $n$  が変化したとして,  $n$  のまわりに  $\Delta n$  の一

<sup>\*25</sup> (59) 式をそのまま計算すると大変なだけで見通しが悪く,  $\varphi_2$  も  $0 \leq \varphi_2 < \pi/2$  と三角関数そのものを近似することはできません。そのため  $n' - n'' \ll 1$  を使って近似しています。

次まで展開すると

$$\begin{aligned} f(n + \Delta n) &\approx n \cos \varphi_2(n) + \left. \frac{d}{dn} n \cos \varphi_2(n) \right|_{n=n} \Delta n \\ &\approx n \cos \varphi_2(n) + \left( \cos \varphi_2(n) - n \sin \varphi_2(n) \frac{d\varphi_2}{dn} \right) \Delta n \end{aligned} \quad (60)$$

となります。今、図 9 にあるように  $\varphi_2$  を  $\varphi'_2$  と  $\varphi''_2$  を 2 等分する角度とし、それに対応する屈折率を  $n$  とします。(60) 式を  $\Delta n = (n' - n'')/2$  とし  $n$  から  $\pm \Delta n/2$  だけ動かしたときの展開式はそれぞれ<sup>\*26</sup>

$$\begin{aligned} n' \cos \varphi'_2 &= f\left(n + \frac{\Delta n}{2}\right) \\ &\approx n \cos \varphi_2(n) + \left( \cos \varphi_2(n) - n \sin \varphi_2(n) \frac{d\varphi_2}{dn} \right) \frac{\Delta n}{2} \\ n'' \cos \varphi''_2 &= f\left(n - \frac{\Delta n}{2}\right) \\ &\approx n \cos \varphi_2(n) - \left( \cos \varphi_2(n) - n \sin \varphi_2(n) \frac{d\varphi_2}{dn} \right) \frac{\Delta n}{2} \end{aligned}$$

よって

$$n' \cos \varphi'_2 - n'' \cos \varphi''_2 = (n' - n'') \left( \cos \varphi_2(n) - n \sin \varphi_2(n) \frac{d\varphi_2}{dn} \right) \quad (61)$$

となります。さらに屈折率の定義より  $n$  と  $\varphi_1$  は次の関係にあります。

$$\sin \varphi_1 = n \sin \varphi_2$$

$\varphi_1$  を固定したまま両辺を  $n$  で微分すれば ( $n$  がわずかに変化すれば)

$$0 = \sin \varphi_2 + n \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dn} \quad (62)$$

です。(62) 式を使えば (61) 式は

$$n' \cos \varphi'_2 - n'' \cos \varphi''_2 \approx \frac{n' - n''}{\cos \varphi_2}$$

と書け、(59) 式に代入することで

$$\Delta \phi = \frac{2\pi L}{\lambda \cos \varphi_2} (n' - n'') \quad (63)$$

<sup>\*26</sup> 図 9 では  $\varphi''_2 > \varphi'_2$  なので  $n'' < n'$  です。



となります。(63)式は平均角度  $\varphi_2$  を使って  $n'$  と  $n''$  の位相差を近似的に計算する<sup>\*27</sup>内容となっています。言い換えれば屈折角  $\varphi_2$  で複屈折の2本の光を代表しているということを示しています。 $n', n''$  の具体的な表式は5.3節で考えます。

### 5.3 光学軸に対する角度と屈折率

光はセル表面に角度を持って入射するので、3.2節や3.3節で考えた誘電主軸に沿った光でも2本の誘電主軸が張る平面に沿って進む光でもありません。図10にセルの入射面と平行な光学軸を  $z$  軸にとった状態で図9の各光線の様子を示しています。5.2節で仮定したように入射光は1点Aで入射するので、光学軸は  $z$  軸という直線で考えます。また、複屈折を5.2節で検討したように、 $\varphi_2$  でセル内の光を代表し1本にしています。

(63)式の屈折率の差はフレネルの法線方程式を解いてそのまま  $n', n''$  の差を求めるのではなく、後で近似する前提で  $n'$  と  $n''$  の逆数の二乗を出してその差を求めます<sup>\*28</sup>。フレネルの法線方程式は次のように解けます。 $z$  軸が光学軸なので  $n_{0x} = n_{0y} = n_o, n_{0z} = n_e$  と表記します。 $z$  軸と入射光がなす角を  $\vartheta$ <sup>\*29</sup>とすれば屈折率ベクトル  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  は

$$\begin{aligned} n_x^2 + n_y^2 &= n^2 \sin^2 \vartheta \\ n_z^2 &= n^2 \cos^2 \vartheta \end{aligned}$$

で表わせるので(21)式は

$$\begin{aligned} 0 &= \left( n_{0x}^2 n_x^2 + n_{0y}^2 n_y^2 + n_{0z}^2 n_z^2 \right) n^2 + n_{0x}^2 n_{0y}^2 n_{0z}^2 \\ &\quad - \left\{ n_{0x}^2 \left( n_{0y}^2 + n_{0z}^2 \right) n_x^2 + n_{0y}^2 \left( n_{0z}^2 + n_{0x}^2 \right) n_y^2 + n_{0z}^2 \left( n_{0x}^2 + n_{0y}^2 \right) n_z^2 \right\} \\ &= \left\{ n_o^2 n^2 \sin^2 \vartheta + n_e^2 n^2 \cos^2 \vartheta \right\} n^2 + n_o^4 n_e^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) \\ &\quad - \left\{ n_o^2 \left( n_o^2 + n_e^2 \right) n^2 \sin^2 \vartheta + 2n_o^2 n_e^2 n^2 \cos^2 \vartheta \right\} \\ &= n_o^2 \sin^2 \vartheta \left\{ \left( n^2 - n_o^2 \right)^2 + n_o^2 \left( n^2 - n_o^2 \right) - n_e^2 \left( n^2 - n_o^2 \right) \right\} + n_e^2 \cos^2 \vartheta \left( n^2 - n_o^2 \right)^2 \\ &= \left( n^2 - n_o^2 \right) \left\{ \left( n^2 - n_e^2 \right) n_o^2 \sin^2 \vartheta + \left( n^2 - n_o^2 \right) n_e^2 \cos^2 \vartheta \right\} \end{aligned}$$

<sup>\*27</sup>  $AB = L/\cos \varphi_2$  は  $AB', AB''$  の平均です。

<sup>\*28</sup> フレネルの法線方程式は解いているのに差を直接求めないのは、形が複雑でその後の計算が大変になるためです。その為、定性的な結論となりますが解析的で意味の分かりやすい形に持っていくことを目的として変形していきます。

<sup>\*29</sup> 図10では分かりづらいですが、入射光を含む平面に  $z$  軸があるとは限りません。

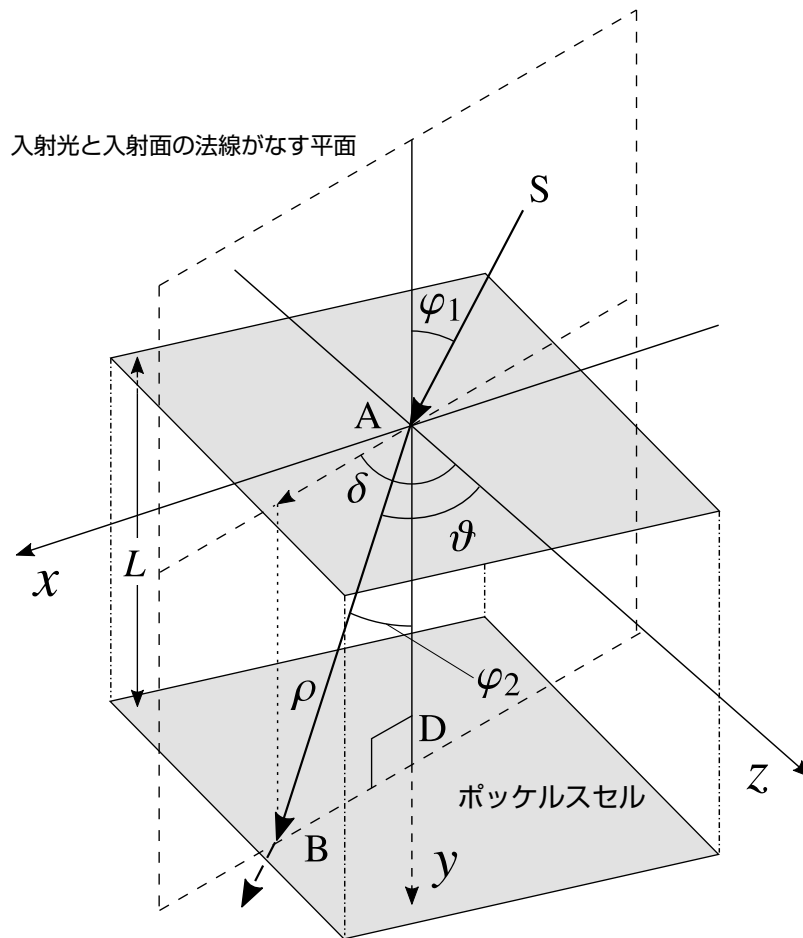


図 10: 光学軸と入射角・屈折角,  $\rho$  はセル中の光の平均幾何学的距離を示します

となります。よって

$$n'^2 = n_o^2$$

$$n''^2 = \frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2 \sin^2 \vartheta + n_e^2 \cos^2 \vartheta} \quad (64)$$

と光学軸である  $z$  軸と任意の角度  $\vartheta$  で進む光の屈折率が分かりました<sup>\*30</sup>。

<sup>\*30</sup> 座標を当てはめる上で図 10 では光学軸に向き ( $\pm$  方向) を付けましたが (64) 式で分かるように  $\pm$  には関係なく異常屈折率が決まることに対応しています。これは  $\delta$  が  $\delta' = \delta + \pi$  でも異常屈折率は同じということになります。

これから  $n', n''$  の逆数の 2 乗の差は

$$\begin{aligned}\frac{1}{n''^2} - \frac{1}{n'^2} &= \left( \frac{\sin^2 \vartheta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \vartheta}{n_o^2} \right) - \frac{1}{n_o^2} \\ &= \left( \frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \sin^2 \vartheta\end{aligned}$$

よって

$$n' - n'' = \frac{(n_o - n_e)(n_e + n_o)n''^2 n'^2}{n_e^2 n_o^2 (n'' + n')} \sin^2 \vartheta$$

ここで  $n' - n'' \ll 1$  なので

$$\approx (n_o - n_e) \sin^2 \vartheta \quad (65)$$

と近似します。(65) 式は  $n' = n_o$  であることから  $n'' \approx n_e$  としたことになります。 $n''$  は光学軸となす角  $\vartheta$  により  $n_e \leq n'' \leq n_o$  なので、右辺では  $|n'' - n'|$  を無視し  $n'' \approx n_e$  というかなり荒い近似です。しかし全体として屈折率の  $\vartheta$  への依存は残し、簡単で定性的な説明に使える近似式となっています。改めて (63) 式で不明だった屈折率の差を書き出せば

$$n' - n'' = (n_o - n_e) \sin^2 \vartheta$$

です。また  $\rho$  は物性や光源に依存しないセル中で 2 つの光が進む幾何学的距離の平均である

$$\rho \equiv AB = \frac{L}{\cos \varphi_2}$$

とすれば位相差 (63) 式は

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{2\pi L}{\lambda \cos \varphi_2} (n_o - n_e) \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{2\pi\rho}{\lambda} (n_o - n_e) \sin^2 \vartheta\end{aligned} \quad (66)$$

となります。(66) 式と図 10 を見比べると角度  $\delta$  が (66) 式にはありません。しかし  $\varphi_2(\varphi_1), \vartheta, \delta$  は互いに独立ではないため自由度が 1 減り、(66) 式は変数として  $\varphi_2, \vartheta$  の 2 つを持ちます。よって (66) 式を検討することで位相差一定のおおよその形状 (干渉縞) が分かります。

(66) 式から定数部分を取り去り  $C$  を定数すれば

$$\rho \sin^2 \vartheta = C \quad (67)$$

が、位相差  $\Delta\phi$  が同一となる条件です<sup>\*31</sup>。(66) 式と (67) 式を比較すれば  $C$  は結晶中で光が進む方向によらず屈折率の差が一定 ( $n'' - n'$  が一定) としたときの仮想的な光の進む幾何学的 (平均) 距離と見ることができます。(67) 式を満たす光は位相差が等しいので干渉縞で同一の線上にあります。干渉縞の暗線も (67) 式で (58) 式を満たすという条件で決まり、干渉縞はセル底面で決まる (67) 式に従ってスクリーンに映ります。

(67) 式が入射角に対しどのように変化するのか、簡単のために入射光と入射面法線がなす平面が  $z$  軸に平行な場合 ( $\delta = 0$ ) で見てみます。このとき  $\vartheta = \pi/2 - \varphi_2$  なので

$$\begin{aligned}\rho \sin^2 \vartheta &= \frac{L}{\cos \varphi_2} \cos^2 \varphi_2 \\ &= L \cos \varphi_2\end{aligned}\tag{68}$$

と  $\varphi_2$  が大きくなると (入射角  $\varphi_1$  が大きくなることと同じ)、位相差  $\Delta\phi$  は単調減少で 0 に近づきます。光の幾何学的距離  $\rho$  は長くなりますが、光が光学軸である  $z$  軸と平行に近づくので光路差に影響する屈折率の差  $n'' - n' = (n_e - n_o) \sin^2 \vartheta$  がより早く 0 に近づくためです<sup>\*32</sup>。

では  $\delta = 0$  の制限を外した任意の状態での  $\rho \sin^2 \vartheta$  の最大値はいくつでししょうか? (67) 式の変数は  $\varphi_2, \vartheta$  の 2 つですが図 10 から 3 つの変数  $\varphi_2, \vartheta, \delta$  が次の条件で結ばれています。

$$\cos \vartheta = \sin \varphi_2 \cos \delta$$

またそれぞれの変域は  $\varphi_2, \vartheta, \delta$  の変域は図 10 から

$$\begin{aligned}0 &\leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 &\leq \vartheta \leq \pi \\ 0 &\leq \delta < 2\pi\end{aligned}$$

です。こうした条件付き多変数関数の極値を調べるため、ラグランジュの未定乗数法を使います。今<sup>\*33</sup>

$$\begin{cases} f(\varphi_2, \vartheta) = \rho \sin^2 \vartheta = \frac{L}{\cos \varphi_2} \sin^2 \vartheta \\ g(\varphi_2, \vartheta, \delta) = \cos \vartheta - \sin \varphi_2 \cos \delta \end{cases}\tag{69}$$

<sup>\*31</sup>  $\sin^2 \vartheta / \cos \varphi_2 = C$  でも良いですが  $\rho$  を出したほうが後で  $x, y, z$  座標に置き換えるので素直ですし意味も想像しやすいです。

<sup>\*32</sup> 図 2b で  $x$  軸を  $z$  軸に読み換えてみてください。

<sup>\*33</sup> (69) 式で変数  $\delta$  があらわにはないので  $f$  の引数から  $\delta$  を落しています。

とします。ここで  $\lambda$  を定数とし、 $F(\varphi_2, \vartheta, \delta) = f(\varphi_2, \vartheta) - \lambda g(\varphi_2, \vartheta, \delta)$  とします。ラグランジュの未定乗数法は、この場合次の 4 式を連立させて解き停留点 (極値の候補) を求めます。

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \varphi_2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \vartheta} = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \vartheta} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \delta} = \frac{\partial f}{\partial \delta} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \delta} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

それぞれ計算すれば

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_2} = L \frac{\sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2} \sin^2 \vartheta + \lambda \cos \varphi_2 \cos \delta = 0 \quad (70)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = 2L \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\cos \varphi_2} + \lambda \sin \vartheta = 0 \quad (71)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \delta} = -\lambda \sin \delta = 0 \quad (72)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \cos \vartheta - \sin \varphi_2 \cos \delta = 0 \quad (73)$$

(72) 式から  $\delta = 0, \pi$  が得られます。これを (73) 式で使い  $\cos \vartheta = \pm \sin \varphi_2$  が分かります。次にこれらを (71) 式に使い

$$\left( \pm 2L \frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_2} + \lambda \right) \sin \vartheta = 0$$

から  $\vartheta = 0, \pi$  または

$$\lambda = \mp 2L \frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_2}$$

を得ます。 $\vartheta = 0, \pi$  であれば  $\cos \vartheta = \pm \sin \varphi_2$  から  $\varphi_2 = \pi/2$  となります。一方  $\vartheta \neq 0, \pi$  のときは  $\lambda$  を (70) 式に代入して

$$\begin{aligned} 0 &= L \frac{\sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2} \sin^2 \vartheta + \lambda \cos \varphi_2 \cos \delta \\ &= L \left\{ \frac{\sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2} (1 - \cos^2 \vartheta) \mp 2 \sin \varphi_2 \cos \delta \right\} \end{aligned}$$

$\cos \vartheta = \pm \sin \varphi_2$  なので

$$0 = L(\sin \varphi_2 \mp 2 \sin \varphi_2)$$

となり、 $\delta = 0, \pi$  のいずれでも  $\varphi_2 = 0$  となります。このとき  $\vartheta = \pi/2$  になります。

条件が煩雑なので  $(\varphi_2, \vartheta, \delta)$  とまとめて書くと

$$(\pi/2, 0, 0), (\pi/2, \pi, 0), (\pi/2, 0, \pi), (\pi/2, \pi, \pi), (0, \pi/2, 0), (0, \pi/2, \pi)$$

が停留点となります。この座標の決定の順序を見ると  $\delta = 0, \pi$  はどちらにも共通で  $\varphi_2 = 0$  と  $\vartheta = 0, \pi$  で条件が分岐しています。

これらの条件で (69) 式が極大値なのかどうか確認します<sup>\*34</sup>。

#### $\varphi_2 = 0$ の場合

このときには  $\vartheta = \pi/2$  であり  $\delta = 0, \pi$  です。よって  $\delta = 0$  で検討した結果 (68) 式のままですが、きちんと見てみます。 $\vartheta, \delta$  を止めたときに  $\varphi_2 = 0$  が極大値となっていることは明らかですが、 $\varphi_2, \delta$  を止めて  $\vartheta$  を  $\pi/2$  周りで動かしたときでも (66) 式は極大値となっています。 $\varphi_2 = 0$  なので  $\delta$  が意味を持ちませんが形式的にも  $\delta = 0, \pi$  で極大値となっています (図 10 参照)。よって  $(\varphi_2, \vartheta, \delta) = (0, \pi/2, 0), (0, \pi/2, \pi)$  で極大値であり  $\rho \sin^2 \vartheta = L$  となっています。

#### $\vartheta = 0, \pi$ の場合

この両者のときには  $\vartheta \rightarrow 0, \pi$  で  $\rho \sin^2 \vartheta \rightarrow 0$  と最大値にはなりません<sup>\*35</sup>。

これらの検討結果より  $\rho \sin^2 \vartheta = L$  が極大値であり明らかに最大値となっています。(66) 式 (位相差の式) の変化する部分の最大値が  $L$  という結果は、スクリーンに映る干渉縞の形状を検討するときに重要になります。

## 5.4 スクリーンに映る干渉縞

それでは (67) 式が空間的にどのような形状になるのか見ていきます。 $z$  軸に光学軸を取った  $xyz$  の直交座標上で考えれば、 $\rho$  は次の 2 式を満たします。(図 10 参照)

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \rho^2 \sin^2 \vartheta = x^2 + y^2 \end{cases}$$

<sup>\*34</sup> 縁付ヘッセ行列を知っている人はそちらで考えても良いです。

<sup>\*35</sup> 今は最大値がいくつかわかりたいので、これだけで十分です。

(67) 式より

$$(x^2 + y^2)^2 = C^2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (74)$$

です。ρ が 0 になることはないので  $x, y, z$  が同時に 0 となることはありません。また (74) 式は  $x$  と  $y$  について対称なので  $x-z$  面上で考えれば十分であり、空間的な描像は  $z$  軸周りに回転することで得られます。なので (74) 式で  $x^2 + y^2$  を  $x^2$  に置き換えて

$$x^4 = C^2(x^2 + z^2) \quad (75)$$

となり、 $x$  軸を  $\pm C$  で横切ることが分かります<sup>\*36</sup>。(75) 式は形式的に  $y = 0$  平面での形状を表わしているのですが、実験で行なっている  $L = 20 \text{ mm}$  のポッケルスセルを通過したあとの形状は (74) 式の立体を  $y = L$  の平面で切ったときの形状となります。(75) 式のグラフを図 11 に示しますが、形状の特徴を知るために  $z^2 \gg x^2$  と  $x$  軸近傍での近似式を見ます。 $z^2 \gg x^2$  では

$$\begin{aligned} x^4 &= C^2(x^2 + z^2) \\ &= C^2 z^2 \left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right) \end{aligned}$$

$x^2/z^2 \ll 1$  なので、この項を落して

$$\approx C^2 z^2$$

よって

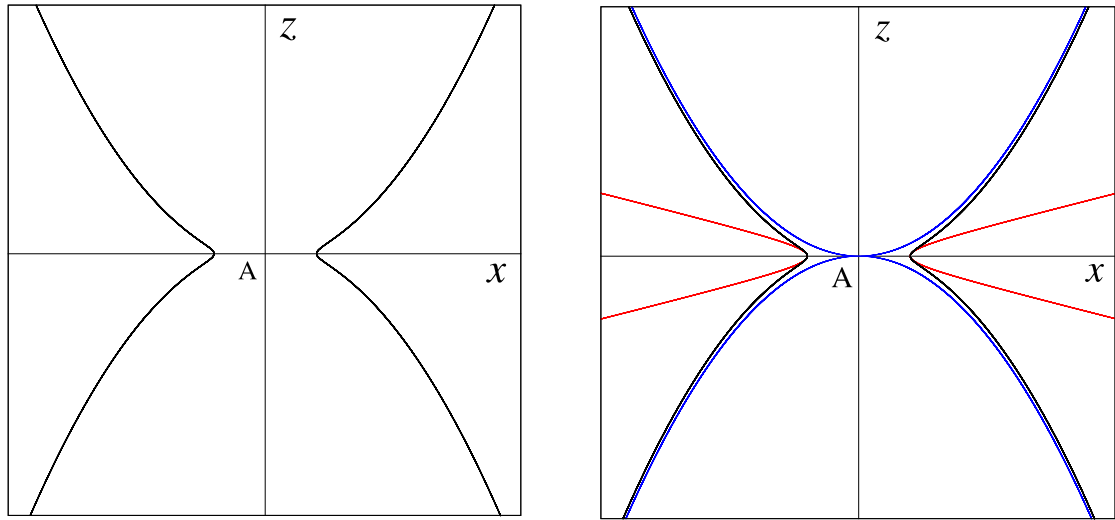
$$x^2 = \pm Cz \quad (76)$$

と放物線であり、 $x$  軸の近傍では

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{x^4}{x^2 + z^2} \\ &= x^2 \left(1 + \frac{z^2}{x^2}\right)^{-1} \\ &\approx x^2 \left(1 - \frac{z^2}{x^2}\right) \\ &= x^2 - z^2 \end{aligned} \quad (77)$$

と双曲線になります。

<sup>\*36</sup>  $x-z$  平面の原点である  $x = z = 0$  も (75) 式を満たしますが、実際には  $(x, y, z) = (0, \pm C, 0)$  になり (74) 式を  $y-z$  平面で見たときの  $y$  軸との交点です。5.1 節で見たように  $x-z$  平面でのこの点はアイソジャイアの交点であり、式の上でも孤立点でもあることから、ここでは考えないことにします。



(a) (75) 式のグラフ

(b) (75) 式に近似式を追加

青:  $x^2 = \pm Cz$ , (76) 式と赤:  $C^2 = x^2 - z^2$ , (77) 式図 11: 位相差  $\Delta\phi$  が一定のグラフ例,  $x-z$  平面上

図 11 は  $y = 0$  での位相差一定の形状だったので, 実験での状態にするには (74) 式に  $y = L$  を代入するだけです。これは (75) 式で  $x^2$  を  $x^2 + L^2$  に置き換えることなので

$$x^4 = (C^2 - 2L^2)x^2 + C^2z^2 + L^2(C^2 - L^2) \quad (78)$$

です。(78) 式は

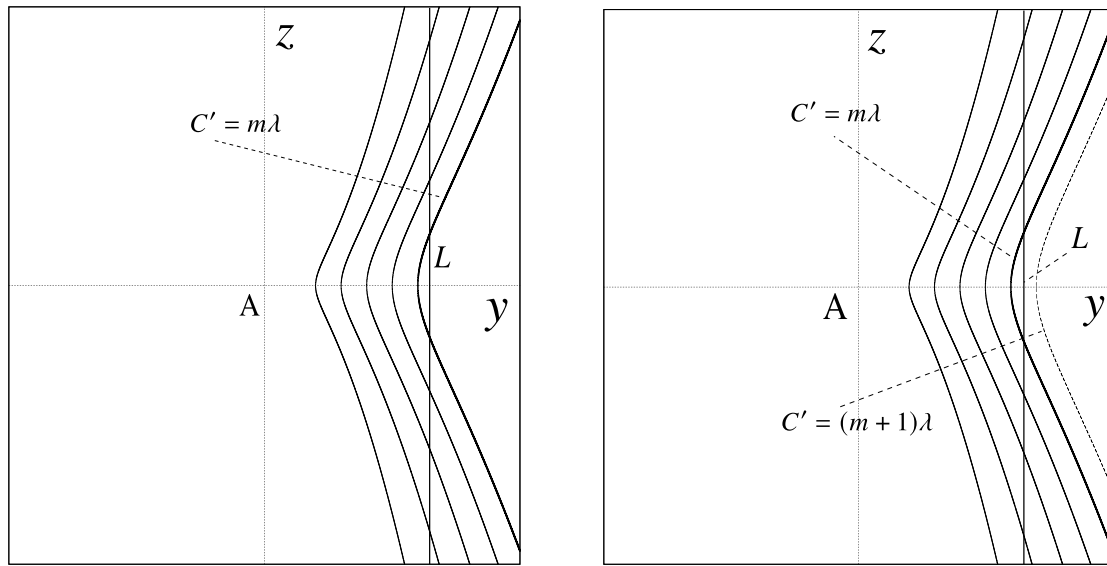
$$\left(x^2 + \frac{2L^2 - C^2}{2}\right)^2 - C^2z^2 = \frac{C^4}{4} \quad (79)$$

とも書けます。(79) 式は  $L, C$  の大小で  $x, z$  のどちらの軸を横切るか見易くなっています。今  $z$  軸を横切るとすれば (79) 式で  $x = 0$  と置き

$$\begin{aligned} \frac{C^4}{4} &= \left(\frac{2L^2 - C^2}{2}\right)^2 - C^2z^2 \\ &= \frac{C^4}{4} + L^2(L^2 - C^2) - C^2z^2 \end{aligned}$$

であり, よって  $L \geq C$  の元で  $z = \pm L/C\sqrt{L^2 - C^2}$  で  $z$  軸を横切ることが分かります。同様に  $x$  軸を横切るとすれば  $z = 0$  として  $L \leq C$  の元で  $x = \pm\sqrt{C^2 - L^2}$  が  $x$  軸との交点となります。また  $y = L$  の切断面が十分な大きさを持てば, (78) 式で表わされる形状は必ず平面で切断されることも注意してください(図 12 参照)。



(a) セル長  $L$  と暗線の形状(b) セル長  $L$  とセル内部の多重反射で生じる暗線 ( $C' = (m + 1)\lambda$ ) の位置に注意図 12: ポッケルスセルによるコノスコープ像 (暗線の形状) の理解,  $x = 0$  の  $y - z$  平面上

$L \geq C$  と  $L \leq C$  が, それぞれどのような状態に対応するのか考えます。両条件とも  $L = C$  を含んでいます但特殊な状態なので,  $L = C$  を分けて最後に独立に取り上げます。また 5.3 節で  $C = \rho \sin^2 \vartheta$  の最大値が  $L$  であることを見えています。そのため, なぜ  $C > L$  が可能なのかも同時に見ていきます。

$C$  は仮想的な光の進む距離でした。それが暗線の条件を満たすとは限りませんが,  $C$  の最大値は  $L$  であると分かっています。よって  $\varphi_1 \neq 0$  の入射光が作る位相差一定である暗線の形状では  $C$  が  $L$  を越えない最大次数 ( $m$  とします) の暗線が  $L$  の内側にでき, それよりも小さな次数の暗線はより内側にできています<sup>37</sup>。もちろん実際の位相差は  $\Delta\phi = 2\pi(n_o - n_e)C/\lambda$  なので  $C$  に屈折率の差を掛けることで光路差となりますが,  $C$  に定数を掛けるだけなので幾何学的距離である  $C$  を扱うことで干渉縞形状の検討は可能です。また以降では特に光路差として示すときには  $C' \equiv (n_o - n_e)C$  と書きます。 $y - z$  平面上で示したグラフが図 12a で, 太線の暗線が  $(n_o - n_e)L > m\lambda$  を満たす最大次数の暗線になります。図 12a の  $y = L$  で切った平面上の形状が暗線の干渉縞の 1 つの組になり,  $z$  軸上に焦点を持つ双曲線の組になります。

<sup>37</sup> 暗線条件は (58) 式の通り  $\Delta\phi = 2m\pi$  でした。これは波長  $\lambda$  の整数倍ということなので, 暗線として  $m\lambda$  ( $m$  は自然数) としています。

どのような式で表わせるのか具体的に見てみます。今は  $z$  軸に焦点を持つグラフを考えているので、ここでは特に  $x \gg 1$  として近似します。(79) 式の  $x$  を含む項を取り出して考えます。

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{2L^2 - C^2}{2}\right)^2 &= \left(\frac{2L^2 - C^2}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{2x^2}{2L^2 - C^2}\right)^2 \\ (2L^2 - C^2)/2 \gg x^2 \text{ として近似すれば} \\ &\approx \left(\frac{2L^2 - C^2}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{4x^2}{2L^2 - C^2}\right) \\ &= \left\{L^2(L^2 - C^2) + \frac{C^4}{4}\right\} \left(1 + \frac{4x^2}{2L^2 - C^2}\right) \end{aligned}$$

よって (79) 式は

$$\frac{C^4}{4} = \left\{L^2(L^2 - C^2) + \frac{C^4}{4}\right\} \left(1 + \frac{4x^2}{2L^2 - C^2}\right) - C^2 z^2$$

であり、整理すると

$$C^2 z^2 - Ax^2 = L^2(L^2 - C^2) \quad (80)$$

です。ここで

$$A = \frac{4L^2(L^2 - C^2) + C^4}{2L^2 - C^2}$$

です。 $L > C$  より  $A > 0$  で (80) 式の右辺も正であることから、(80) 式は  $z$  軸に焦点を持つ双曲線となっています。

実験で観察された干渉縞は  $x$  軸上に焦点を持つ別の双曲線の組もありました。これはポッケルスセルの入射光側と射出光側の面が平行であるため、ポッケルスセル内部での多重反射した光による干渉縞になります。図 13 の通り、平行面間での多重反射のため、その経路では (67) 式の  $\sin^2 \vartheta$  は変わらず  $\rho = L/\cos \varphi_2$  も変わりません。射出面からの光を見るので反射が偶数回で反射による位相の反転も考慮する必用もなく、単純に (67) 式の  $\rho$  が長くなったと扱うことになります。多重反射した光のうちで  $C' = (m+1)\lambda$  の暗線が図 12b のように  $L$  の外側にできます。より  $C$  が大きな暗線の干渉縞は、この次数  $m+1$  の暗線の外側にできます。 $C > L$  での干渉縞 (暗線) は図 12b で  $y = L$  で切断した断面に表われる形状になります。図 12b では  $C > L$  の暗線と  $y = L$  との交点が見えていませんが光の波長に対して十分大きな平面 (10 mm × 10 mm) で切断するので、(77) 式で見た  $x$  軸

上に焦点を持つ双曲線の組になります<sup>\*38</sup>。これらが  $C < L$  の暗線とは別の双曲線の組となります。

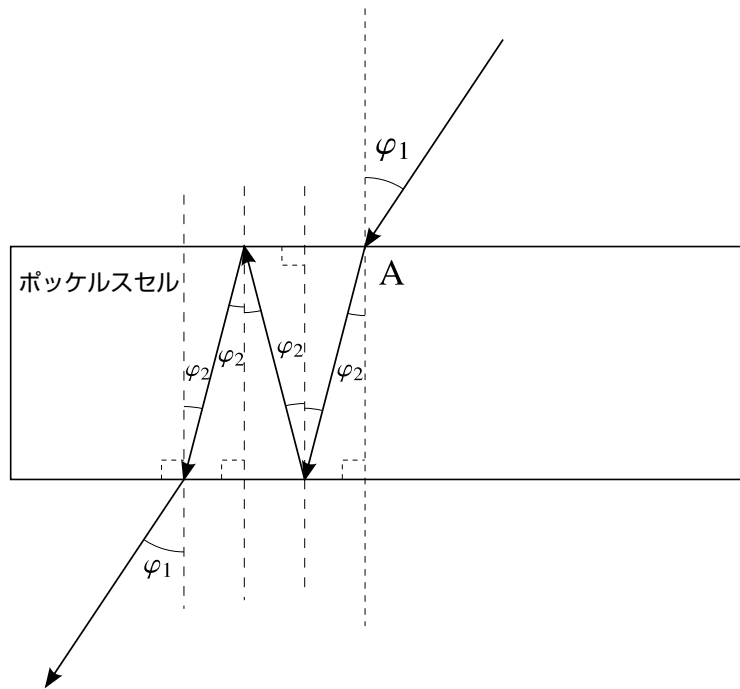


図 13: ポッケルスセル内の多重反射 (2 回反射の例)

こちらも具体的にどのような式になるのか見ていきます。  $x$  軸近傍のグラフとなるので  $z^2 \ll C^2$  として (79) 式を近似します。(79) 式から

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{2L^2 - C^2}{2}\right)^2 &= \frac{C^4}{4} + C^2 z^2 \\ &= \frac{C^4}{4} \left(1 + \frac{4z^2}{C^2}\right) \end{aligned}$$

両辺の平方根を取れば

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2L^2 - C^2}{2} &= \pm \frac{C^2}{2} \left(1 + \frac{4z^2}{C^2}\right)^{1/2} \\ &\approx \pm \frac{C^2}{2} \left(1 + \frac{2z^2}{C^2}\right) \\ &= \pm \frac{C^2}{2} \pm z^2 \end{aligned}$$

<sup>\*38</sup> 位相差一定の形状は立体的で、(75) 式を  $z$  軸周りに回転させた形状であったことを思い出してください。

となります。整理すると

$$x^2 \mp z^2 = \frac{C^2}{2}(1 \pm 1) - L^2$$

ですが複号同順の下側を取ると式が成り立たないため、必然的に上側の符号を取り

$$x^2 - z^2 = C^2 - L^2 \quad (81)$$

が求めていた式(グラフ)になります。

$z$  軸に焦点を持つ双曲線の組 (80) 式と  $x$  軸に焦点を持つ双曲線の組 (81) 式があわさって、光学軸に平行な平面に入射し入射面に平行な射出面から出る単色の収束光による一軸性結晶のコノスコープ像となります。(図 14 参照, これにアイソジャイアの暗線 (57) 式が十字に重なります。)

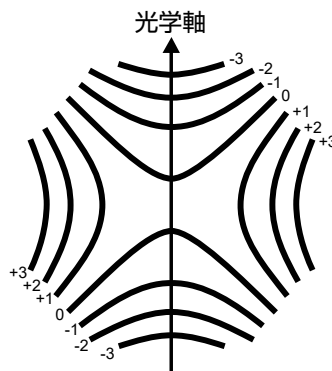


図 14: ポッケルスセルの干渉縞(暗線)  
数字はその暗線の次数と  $m(L$  を越えない最大の次数) の差

それでは  $C$  が暗線条件を満たし、かつ  $C = L$  のときはどのようなのでしょうか? 初期位相差 (電圧を印加していない状態での位相差) がこの条件を満たしていることはほぼないですが、ポッケルスセルに電圧を印加することでこの状態を作れます。このときは  $y = L$  で切断すると、原点  $x = z = 0$  で  $y = L$  面に接して、傾き  $\pm 1$  の直線となります。この状態で常光線と異常光線の位相差  $m\lambda$  が  $m\lambda = L$  となっています。この直線の式は単純で、(80) 式でも (81) 式でも  $L = C$  を代入すれば

$$z = \pm x$$

となります。

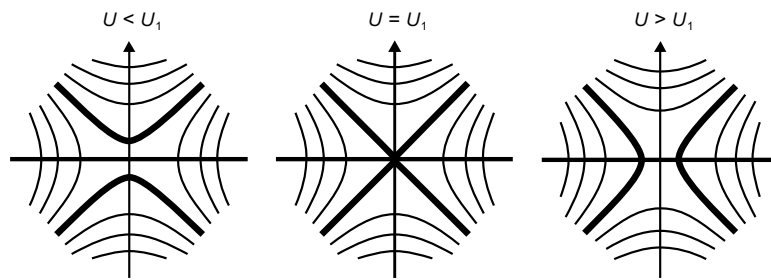


図 15: 電圧を印加し位相差が大きくなっていくときの暗線の移動  
太線は  $C' = m\lambda$  の暗線

実験で半波長電圧  $V_{\pi}$  を測定するときにはこの状態になるように電圧を印加し、その後電圧を変えていき原点を通る "X" 字の暗線が明線となるまでの電圧を測定して、その差から半波長電圧を決定します。

## 参考文献

- [1] Max Born and Emil Wolf, "*Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light, 6th Edition*" (Pergamon Press, 1980)
- [2] 黒田 和男, 光機能材料およびデバイスの基礎 I, レーザー研究, 2000, 28 巻, 8 号, p. 548-555, <https://doi.org/10.2184/l sj.28.548>