

# UE4040600 円偏光とファラデー効果

3B Scientific

25 July 2019

## 1 目的

ファラデー効果が起こる機構を，マクスウェル方程式を使い波動光学として検討する。

## 2 誘電率テンソル

### 2.1 円偏光

本実験の光源である半導体レーザー（緑，532nm）では，振動数が  $\nu \approx 564$  THz と大きいので物質の磁場追従性がなく，透磁率  $\mu$  は真空の透磁率  $\mu_0$  に置き換えられます。このため物質中の電場の伝播を考えることで，物質中の光の伝播を説明できます。

自然光は電場振動面が様々な向きの光が重なり合っていますが，偏光フィルターを通すと電場の振動面が一方向の直線偏光が得られます。直線偏光した光が物質を通過することで電場振動面の向きに変化が生じ，偏光状態が変化することを旋光性といいます。

なお，以下の図 (1) では光は紙面から裏側へ進行するものとし， $z$  軸の正はこの向きとします。<sup>\*1</sup> このとき電場振動面が時計回りに変化することを「右旋光」，反時計回りを「左旋光」と定義します。

偏光状態は左右円偏光を使うことで説明できます。図 (1a) のように互いの電場振幅と偏光面の回転速度（仮に角速度  $\omega$  とします）が等しく，逆回転している左右の円偏光を考えると，これらを合成することで直線偏光を表わせることが分かります。

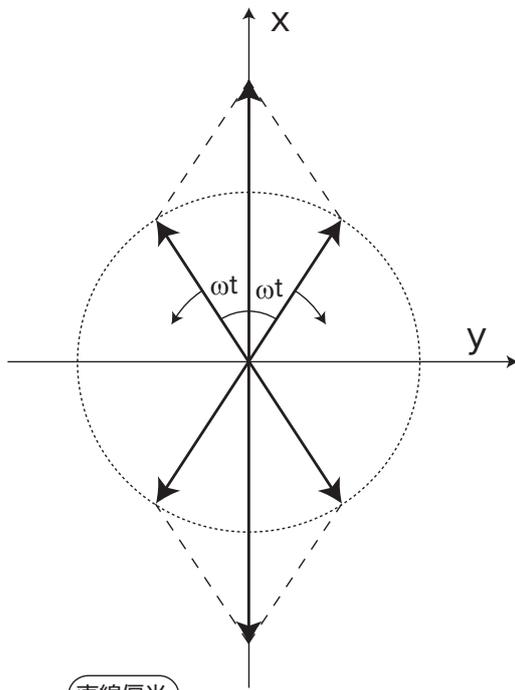
一方，左右の円偏光で位相差があると図 (1b) のように，その位相差の 1/2 だけ片側に傾いた直線偏光となります。振幅に差があると図 (1c) のように楕円偏光となり，これを円偏光二色性（円二色性）といいます。これは左右円偏光で物質での光の吸収（エネルギーの吸収）が異なっているためです。

多くの場合この両者が同時に起き，図 (1d) のように楕円の主軸が傾いた楕円偏光となります。

---

<sup>\*1</sup> 紙面上に原点があるとすれば，この図を見ているわたし達は  $z$  軸が負の領域にいることになります。

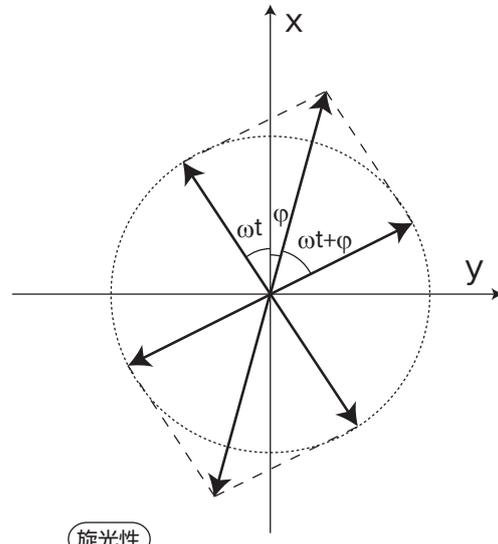
このように物質中での偏光の様子は、左右それぞれの円偏光に対する物質の応答を考えることで理解できます。旋光性を持つ物質中の光は物理的にどのように表わせるのかを考えます。



直線偏光

直線偏光の電場は同一振幅・同位相の右円旋光と左円旋光に分解できる

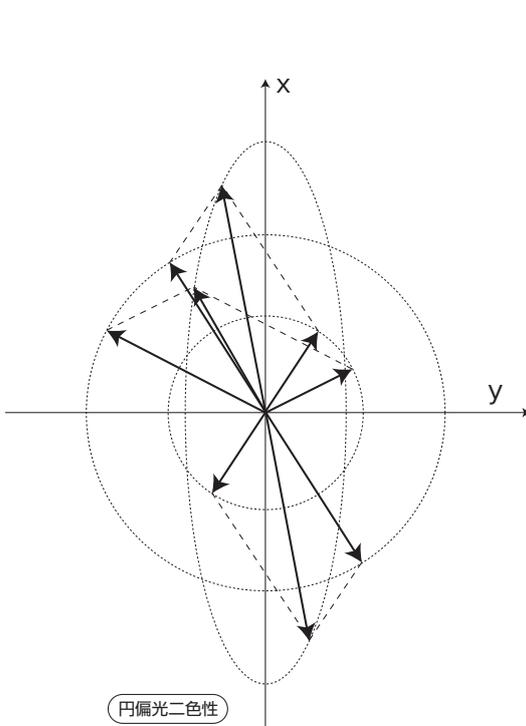
(a) 直線偏光



旋光性

物体を通過後、右円旋光と左円旋光の位相差が  $2\phi$  だった場合は、旋光角が  $\phi$  となる (図は右円旋光が  $2\phi$  進んでいた場合)

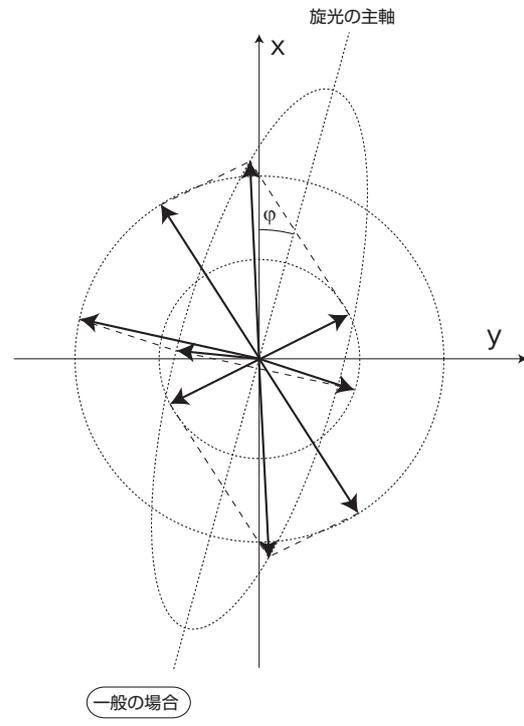
(b) 旋光性



円偏光二色性

物体を通過後、左右円旋光の振幅が異なった場合は、電場ベクトルが楕円を描く。(図は右円旋光の振幅が短くなった場合。このときは電場ベクトルが左旋回する。)

(c) 円旋光二色性



一般の場合

多くの場合、物体を通過後は旋光性と円偏光二色性を同時に示す。このときは楕円偏光で旋光の主軸が傾く。(図は右円旋光の位相が  $2\phi$  進み振幅が小さくなった場合)

(d) 一般的な場合

## 2.2 複素屈折率

物質中のマクスウェル方程式は以下のように表せます。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.2-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.2-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0 \end{array} \right. \quad (2.2-3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (2.2-4)$$

誘電体中の光の透過を考えていくので、真電荷はなく  $\rho = 0$  となっています。

また光の振動数では磁場追従性がないので

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

であり、真空の誘電率を  $\epsilon_0$ 、物質の比誘電率を  $\epsilon_r$  とすれば\*2,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

と表せます。

物質が光学的に等方な場合は比誘電率はスカラーとなるので、電場  $\mathbf{E}$  と電束密度  $\mathbf{D}$  の向きは一致しています。そのため (2.2-3) 式から

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.2-5)$$

が言えます。

物質に入射する光が単色光で平面波とすれば、電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{B}$  は振動数を  $\omega$ 、波数ベクトルを  $\mathbf{K}$  として、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp\{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \quad (2.2-6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \exp\{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \quad (2.2-7)$$

$\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$  は、それぞれの振幅の大きさを持つ一定のベクトルです。

\*2 ここで比誘電率を使っているのは、後で真空の誘電率と真空の透磁率を掛け合わせて、真空中の光速に置き換えるためです。

マクスウェル方程式 (2.2-1)-(2.2-3) から磁場  $\mathbf{B}$  を消すと,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) &= \operatorname{rot} \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \left( \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right)\end{aligned}$$

左辺はベクトル解析の公式から,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

(2.2-5) 式を考慮すると,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0} \left( \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right) \quad (2.2-8)$$

(2.2-6) を代入すると (2.2-8) 式は,

$$\begin{aligned}|\mathbf{K}|^2 &= \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_0 \omega^2 \left( \varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \\ &= \frac{\omega^2}{\mu_0 c^2} \left( \varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right)\end{aligned} \quad (2.2-9)$$

$$\therefore |\mathbf{K}| = \frac{\omega}{\mu_0 c} \sqrt{\varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}} \quad (2.2-10)$$

となり, 物質中の波数は一般に複素数で表される事が分かります。

元々の電場の式から真空中の光速  $c$  は

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{K}|}$$

だったので, 物質中の光速 (位相速度)  $c'$  は (2.2-10) 式の物質中の波数を用いて,

$$\begin{aligned}c' &= \frac{\omega}{\frac{\omega}{\mu_0 c} \sqrt{\varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}}} \\ &= \frac{\mu_0 c}{\sqrt{\varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}}}\end{aligned} \quad (2.2-11)$$

と書けます。実際には実部が速度の意味を持ちます。

(2.2-10) 式のように物質中の波数は根号の中に複素数があるので, 代わって扱いやすいように複素屈折率  $N$  を導入します。

$$N = n + i\kappa \quad (2.2-12)$$

$n$  は通常の屈折率であり、 $\kappa$  は消光係数と呼ばれる光の強度が物質内部に侵入するに連れて減少する効果を表す定数で、物質毎に異なります。屈折率  $n$  は 2 つの媒質中での光速比であるので、物質中の光速を  $c'$  とすると

$$c' = \frac{c}{n}$$

一方、波数  $K$  は物質中の波長を  $\lambda'$  とすれば、

$$K = \frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{n\omega}{c}$$

となります。よって屈折率  $n$  を複素屈折率  $N$  に拡張すると波数  $K$  は、

$$K = \frac{N\omega}{c} \tag{2.2-13}$$

$$= \frac{n\omega}{c} + i\frac{\kappa\omega}{c} \tag{2.2-14}$$

となります。<sup>\*3</sup>

よって電場 (2.2-6) 式は複素屈折率  $N$  を用い、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \exp\{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \\ &= \mathbf{E}_0 \exp\left\{i\omega \left(\frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}}{c} - t\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.2-15}$$

ここで  $\mathbf{N}$  は波数ベクトル  $\mathbf{K}$  と同じ向きで大きさ  $N$  のベクトルとします。

消光係数  $\kappa$  の意味を式で確認します。簡単のため波数ベクトルの向き (複素屈折率ベクトルの向き) は  $z$  軸方向とします。(2.2-15) 式に (2.2-12) 式を入れると

$$\mathbf{E}_0 \exp\left\{i\omega \left(\frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}}{c} - t\right)\right\} = \mathbf{E}_0 \exp\left\{-\kappa \frac{\omega}{c} z\right\} \exp\left\{i\omega \left(\frac{n}{c} z - t\right)\right\} \tag{2.2-16}$$

これから、速度が  $c/n$  になり、一波長分進むごとに電場が  $\exp\{-\kappa \frac{2\pi}{n}\}$  減衰するということになります。これが消光係数と呼ぶ理由です。

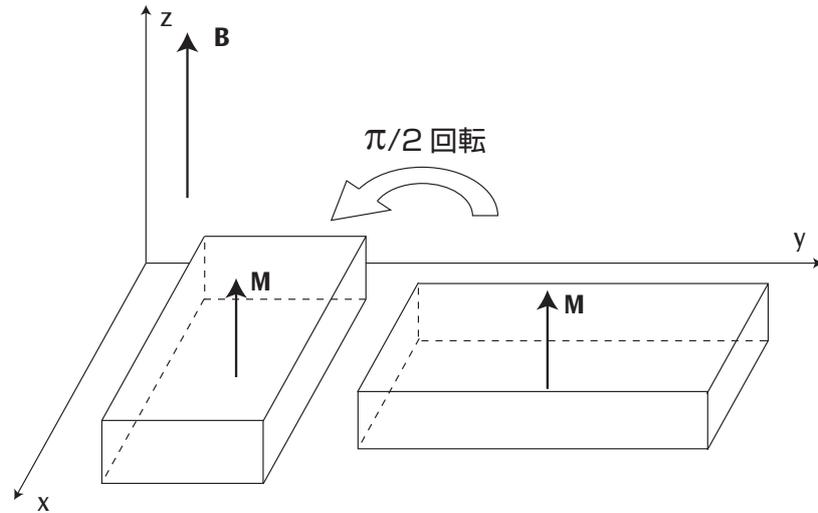
## 2.3 誘電率テンソルと対称性

物質の電場に対する応答は、誘電率  $\varepsilon$  で表されます。光学的に等方な物質であっても外部磁場をかけたときは、その方向が異方軸となり、誘電率はテンソルとして扱う必要が出てきます。

それを見るために次のような例を考えます。物質は光学的に等方であるとし、そのため磁場を印加しない限り、回転させても等方性に变化はありません。

この物質の  $z$  軸方向に外部磁場  $\mathbf{B}$  を印加します。そのため磁化  $\mathbf{M}$  も同じ方向になります。この物質を  $\pi/2$  だけ異方軸を回転軸として回転させても異方軸は  $z$  方向なので、誘電率テンソル  $\varepsilon$  の  $x, y$  成分は不変となります。また、 $z$  成分は変換を受けないため、これも不変です。

<sup>\*3</sup> (2.2-13) 式を (2.2-10) 式を比べてみましょう。

図 2: 磁場中での物体の  $\pi/2$  回転

真空の誘電率  $\epsilon_0$  はスカラーとして扱えるので  $\epsilon_0$  を落とし、比誘電率テンソル  $\epsilon_r$  のみの回転に対する条件（対称性）を見ることにし、その成分を  $\epsilon_{ij}$  と書くことにします。

そのため、次の式が成り立ちます。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.3-17)$$

よって

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} \end{cases} \quad (2.3-18)$$

$$\begin{cases} \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} \end{cases} \quad (2.3-19)$$

$$\begin{cases} \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = \epsilon_{yz} = 0 \end{cases} \quad (2.3-20)$$

となり、比誘電率テンソルの独立な成分は 3 つ  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{xy}$ ,  $\epsilon_{zz}$  となります。

行列形式で書けば、

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ -\epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.3-21)$$

となります。

---

### 3 マクスウェル方程式から見たファラデー効果

#### 3.1 光学異方性を持つ物質中の光

単色光で平面波の電場が外部磁場による光学異方性（一軸異方性）がある物質ではどのように伝播するのか検討します。

(2.2-1)～(2.2-2) 式に平面波の式を入れると

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E} &= i\mathbf{K} \times \mathbf{E} & (3.1-1) \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= i\omega \mathbf{B}\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{K} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (3.1-2)$$

ここで簡単のために伝導電流  $\sigma \mathbf{E}$  を分極電流  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  に含めて（繰り込んで）、次のようにします

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \cdot \text{rot } \mathbf{B} = i \frac{1}{\mu_0} \mathbf{K} \times \mathbf{B} \\ &= \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \equiv \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{K} \times \mathbf{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \omega \mathbf{E} \quad (3.1-3)$$

第 2.3 節で見たように、比誘電率  $\varepsilon_r$  がテンソルとなるので、比誘電率テンソルが非対角項を持つ物質では電束密度  $\mathbf{D}$  と電場  $\mathbf{E}$  の向きは異なります。このことから  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  でも  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  とは言えなくなります。

なお、ここでの比誘電率  $\varepsilon_r$  には伝導電流を組み込んでいるので、純粋な比誘電率とは異なります。しかし、誘電体なので元々伝導電流は微小であり、問題となる差にはなりません。<sup>\*4</sup>

式 (3.1-2)(3.1-3) から磁束密度  $\mathbf{B}$  を消して、 $\mathbf{E}$  が満たす式を考えます。

$$\begin{cases} \mathbf{K} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{K} \times \mathbf{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega \varepsilon_r \mathbf{E} \end{cases}$$

---

<sup>\*4</sup> 第 2.2 節で伝導電流をあらわに入れていたのは、物体中では波数が高周波に本質的に複素数となることを示すためでした。

これは、次のようになります。

$$\begin{aligned}\mathbf{K} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\omega} \mathbf{K} \times (\mathbf{K} \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{\omega} \{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{E})\mathbf{K} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{K})\mathbf{E}\} \\ &= -\mu_0 \varepsilon_0 \omega \varepsilon_r \mathbf{E}\end{aligned}\tag{3.1-4}$$

よって物質中で電場（光）が満たすべき式は、

$$\left(|\mathbf{K}|^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r\right) \mathbf{E} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{E})\mathbf{K} = 0\tag{3.1-5}$$

となります。

$\mathbf{K}$  を複素屈折率  $\mathbf{N}$  で書き換えると、次のようになります。

$$\left(|\mathbf{N}|^2 - \varepsilon_r\right) \mathbf{E} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{E})\mathbf{N} = 0\tag{3.1-6}$$

(3.1-5) 式の左辺第二項の係数は、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

を使ってまとめています。

### 3.2 マクスウェル方程式から見たファラデー効果

ファラデー効果は磁場を印加した物体に光を通すと偏光面が回転するというものです。通常、ファラデー効果を見るときにはファラデー配置とフォークト配置があります。

- ファラデー効果：磁場と光の進行方向が同じ
- フォークト配置：磁場と光の進行方向が垂直

ここでは実験例で行っているファラデー配置で旋光がどのように起こるのか検討します。

磁場  $\mathbf{B}$  の向きを  $z$  軸方向とします。よって光の進行方向も  $z$  軸の向きとなるので、これまで扱ってきた単色で平面波の電場は次のように表せます。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\left\{i\omega \left(\frac{Nz}{c} - t\right)\right\}\tag{3.2-7}$$

光の進行方向が  $z$  軸方向なので複素屈折率ベクトル  $\mathbf{N}$  は、

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix}\tag{3.2-8}$$

となります。

よって、(3.1-6) 式は、

$$\begin{pmatrix} N^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2 - \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N^2 E_z \end{pmatrix} = 0$$

振動を表す  $\exp$  は不要なので、次の式になります。

$$\begin{pmatrix} N^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.2-9)$$

(3.2-9) 式を満たす  $\mathbf{E}_0 \neq 0$  な電場が存在する必要十分条件は、電場にかかる行列の行列式が 0 となることです。よって、

$$\begin{vmatrix} N^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2-10)$$

(3.2-10) 式より  $N^2$  として

$$N^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} \quad (3.2-11)$$

を得ます。

この  $N^2$  を (3.2-9) 式に入れると、

$$\begin{pmatrix} \pm i\varepsilon_{xy} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \pm i\varepsilon_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm i\varepsilon_{xy} E_{0x} - \varepsilon_{xy} E_{0y} \\ \pm i\varepsilon_{xy} E_{0y} + \varepsilon_{xy} E_{0x} \\ -\varepsilon_{zz} E_{0z} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.2-12)$$

この連立方程式から

$$\begin{cases} E_{0y} = \pm i E_{0x} \\ E_{0z} = 0 \end{cases} \quad (3.2-13)$$

$$\begin{cases} E_{0y} = \pm i E_{0x} \\ E_{0z} = 0 \end{cases} \quad (3.2-14)$$

が言えます。電場の振幅が  $E_0$  なので

$$|E_{0x}| = |E_{0y}| = E_0 \quad (3.2-15)$$

であり、電場  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = E_0(\mathbf{i} \pm i\mathbf{j}) \exp\left\{i\omega\left(\frac{Nz}{c} - t\right)\right\} \quad (3.2-16)$$

になります。ここで  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  は、それぞれ  $x$  軸,  $y$  軸方向の単位ベクトルです。

(3.2-16) 式がどのような電場を表しているか確認します。意味を持つのは実部なので、 $\pm$  の + の実部を取ると、

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{Nz}{c}\right)\right) \\ E_y = E_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{Nz}{c}\right)\right) \end{cases} \quad (3.2-17)$$

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{Nz}{c}\right)\right) \\ E_y = E_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{Nz}{c}\right)\right) \end{cases} \quad (3.2-18)$$

この電場は  $x, y$  成分の振幅が等しく、位相が  $\pi/2$  ずれた電場の重ね合わせとなり、右円旋光を表しています。<sup>\*5</sup>

同様に  $\pm$  の - を取れば、

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{Nz}{c}\right)\right) \\ E_y = -E_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{Nz}{c}\right)\right) \end{cases} \quad (3.2-19)$$

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{Nz}{c}\right)\right) \\ E_y = -E_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{Nz}{c}\right)\right) \end{cases} \quad (3.2-20)$$

と、左円旋光を表していることが分かります。

結論として、ファラデー効果のファラデー配置では、左右の円旋光が固有として物質中を伝播することになります。この効果は比誘電率の非対角項が  $\epsilon_{xy} \neq 0$  が必要です。

## 4 ファラデー効果の物理的理解

### 4.1 複屈折率を誘電率で表すこと

この節ではファラデー回転角  $\varphi$  が複素屈折率、比誘電率でどのように表されるのか、検討していきます。

(3.2-11) 式が複素屈折率の固有値になりますが自乗が複素数なので、元々の複素屈折率の表式に合わせてパラメータを導入します。

$$\begin{cases} N_+ = n_+ + i\kappa_+ \\ N_- = n_- + i\kappa_- \end{cases} \quad (4.1-1)$$

$$\begin{cases} N_+ = n_+ + i\kappa_+ \\ N_- = n_- + i\kappa_- \end{cases} \quad (4.1-2)$$

ここで  $n_{\pm}$  と  $\kappa_{\pm}$  は、異方性がないときの複素屈折率の実部・虚部と次の関係にあります。

$$\begin{cases} n = \frac{n_+ + n_-}{2} \\ \kappa = \frac{\kappa_+ + \kappa_-}{2} \end{cases} \quad (4.1-3)$$

$$\begin{cases} n = \frac{n_+ + n_-}{2} \\ \kappa = \frac{\kappa_+ + \kappa_-}{2} \end{cases} \quad (4.1-4)$$

$N_+$  が右旋光で  $N_-$  が左旋光のときの複屈折率ですが、(3.2-16) 式から分かるように、それぞれ回転方向が反対だけで回転角の絶対値は等しいため、(4.1-3)(4.1-4) 式が成り立っています。

<sup>\*5</sup> 例えば  $z=0$  と位置を固定して、時間  $t$  をプラスに変化させたときの  $(x, y)$  座標を考えてみましょう。このとき紙面では  $x-y$  平面を裏から見ていることに注意してください。

また、次の微小量を定義します。それぞれの変化量の2倍にあたります。

$$\begin{cases} \Delta n = n_+ - n_- \\ \Delta \kappa = \kappa_+ - \kappa_- \end{cases} \quad (4.1-5)$$

$$\begin{cases} \Delta n = n_+ - n_- \\ \Delta \kappa = \kappa_+ - \kappa_- \end{cases} \quad (4.1-6)$$

よって、

$$N_{\pm}^2 = (n_{\pm} + i\kappa_{\pm})^2 \quad (4.1-7)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ n \pm \frac{\Delta n}{2} + i \left( \kappa \pm \frac{\Delta \kappa}{2} \right) \right\}^2 \\ &= n^2 - \kappa^2 + \frac{\Delta n^2}{4} - \frac{\Delta \kappa^2}{4} \pm (n\Delta n \mp \kappa\Delta \kappa) + 2i \left( n\kappa \pm \frac{n\Delta \kappa}{2} \pm \frac{\kappa\Delta n}{2} + \frac{\Delta n\Delta \kappa}{4} \right) \end{aligned} \quad (4.1-8)$$

ここで2次以上の微小量を落とし、

$$\begin{aligned} N_{\pm}^2 &= n^2 - \kappa^2 \pm (n\Delta n - \kappa\Delta \kappa) + 2i \left( n\kappa \pm \frac{n\Delta \kappa}{2} \pm \frac{\kappa\Delta n}{2} \right) \\ &= n^2 - \kappa^2 \mp (\kappa\Delta \kappa - n\Delta n) + 2i \left\{ n\kappa \pm \left( \frac{n\Delta \kappa}{2} + \frac{\kappa\Delta n}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.1-9)$$

これと(3.2-11)式を比較して、複屈折率を比誘電率の成分で表します。ここで誘電率テンソルの成分自身が複素数であることに注意します。このことは次のように分かります。

$$n = \frac{c}{c'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}}{\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}}} = \sqrt{\epsilon_r}$$

$n$ を複素数に拡張するので、比誘電率テンソルの成分も複素数となります。

よって(3.2-11)の右辺は、比誘電率テンソルの成分が複素数であることより、

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \epsilon'_{xx} + i\epsilon''_{xx} \\ \epsilon_{xy} = \epsilon'_{xy} + i\epsilon''_{xy} \end{cases} \quad (4.1-10)$$

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \epsilon'_{xx} + i\epsilon''_{xx} \\ \epsilon_{xy} = \epsilon'_{xy} + i\epsilon''_{xy} \end{cases} \quad (4.1-11)$$

として実部と虚部を定義します。

これから(3.2-11)式右辺は次のように計算できます。

$$\epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy} = (\epsilon'_{xx} \mp \epsilon''_{xy}) + i(\epsilon''_{xx} \pm \epsilon'_{xy}) \quad (4.1-12)$$

式(4.1-9)(4.1-12)の実部と虚部を正負符号含めて比較することで、次の等式が得られます。

$$\begin{cases} \epsilon'_{xx} = n^2 - \kappa^2 \\ \epsilon''_{xx} = 2n\kappa \\ \epsilon'_{xy} = \kappa\Delta n + n\Delta \kappa \\ \epsilon''_{xy} = \kappa\Delta \kappa - n\Delta n \end{cases} \quad (4.1-13)$$

$$\begin{cases} \epsilon'_{xx} = n^2 - \kappa^2 \\ \epsilon''_{xx} = 2n\kappa \\ \epsilon'_{xy} = \kappa\Delta n + n\Delta \kappa \\ \epsilon''_{xy} = \kappa\Delta \kappa - n\Delta n \end{cases} \quad (4.1-14)$$

$$\begin{cases} \epsilon'_{xx} = n^2 - \kappa^2 \\ \epsilon''_{xx} = 2n\kappa \\ \epsilon'_{xy} = \kappa\Delta n + n\Delta \kappa \\ \epsilon''_{xy} = \kappa\Delta \kappa - n\Delta n \end{cases} \quad (4.1-15)$$

$$\begin{cases} \epsilon'_{xx} = n^2 - \kappa^2 \\ \epsilon''_{xx} = 2n\kappa \\ \epsilon'_{xy} = \kappa\Delta n + n\Delta \kappa \\ \epsilon''_{xy} = \kappa\Delta \kappa - n\Delta n \end{cases} \quad (4.1-16)$$

これを逆に解いて  $n, \kappa, \Delta n, \Delta \kappa$  を誘電率成分で表わします。

(4.1-15)(4.1-16) 式から

$$\begin{cases} \Delta n = \frac{\kappa \varepsilon'_{xy} - n \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \\ \Delta \kappa = \frac{n \varepsilon'_{xy} + \kappa \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \end{cases} \quad (4.1-17)$$

$$\quad (4.1-18)$$

ここで2つの複素屈折率の差  $\Delta N = \Delta n + i\Delta \kappa$  を定義すると、

$$\Delta N = \Delta n + i\Delta \kappa \quad (4.1-19)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n^2 + \kappa^2} \{ \kappa \varepsilon'_{xy} - n \varepsilon''_{xy} + i(n \varepsilon'_{xy} + \kappa \varepsilon''_{xy}) \} \\ &= \frac{i(n - i\kappa)(\varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy})}{(n - i\kappa)(n + i\kappa)} \\ &= i \frac{\varepsilon_{xy}}{n + i\kappa} \\ &= i \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \end{aligned} \quad (4.1-20)$$

$$\therefore (n + i\kappa)^2 = n^2 - \kappa^2 + 2in\kappa = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx} = \varepsilon_{xx}$$

(4.1-20) 式でファラデー配置での複屈折率 (の差分) が比誘電率で表されました。

## 4.2 光の入射から透過まで（比誘電率による記述）

それではファラデー回転角  $\varphi$  が誘電率を使ってどのように表わせるか検討しますが、同時刻での入射端と放出端の偏光面の回転角を見れば十分です。

第 3.2 節で見たようにファラデー配置では左右の円偏光が固有状態でした。また、第 2.1 節のように直線偏光は左右の円旋光の重ね合わせとして表現できます。

このことから、直線偏光がファラデー配置した物質に入射し透過するまでを、次のように3段階に分けます。

1. 物質に入る前の直線偏光を、通常の直交座標系で記述する
2. 物質に入射した光を左右の円偏光の重ね合わせで表し、それぞれの円旋光が感じる屈折率を使う
3. 物質を透過した後の光を直交座標系表示に戻し、偏光面の回転角を調べる

$z$  軸の向きに進む、偏光面が  $x$  軸と一致する直線偏光がファラデー配置されたサンプルに入射することを考えます。物体の入射面を  $z = 0$  とします。このとき平面波単色光の電場ベクトルは、

次のとおりです。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\left\{i\omega \left(\frac{N}{c}z - t\right)\right\} \quad (4.2-21)$$

$$= E_0 \exp\left\{i\omega \left(\frac{N}{c}z - t\right)\right\} \mathbf{i} \quad (4.2-22)$$

$$= E_0 \exp\left\{i\omega \left(\frac{N}{c}z\right)\right\} \mathbf{i} \quad (4.2-23)$$

この節の冒頭で述べたように (4.2-23) で  $t = 0$  とし、消しています。

この直線偏光した電場は第 2.1 節で述べたように、振幅・振動などが等しい左右の円偏光に分解できます。

今、ベクトル  $\mathbf{l}, \mathbf{r}$  を次のように定義します。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - i\mathbf{j}) \\ \mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + i\mathbf{j}) \end{array} \right. \quad (4.2-24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - i\mathbf{j}) \\ \mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + i\mathbf{j}) \end{array} \right. \quad (4.2-25)$$

これに時間的・空間的な振動を表す  $\exp\left\{i\omega \left(\frac{N \cdot \mathbf{r}}{c} - t\right)\right\}$  を掛けると、前に見たように  $\mathbf{l}$  が左円旋光、 $\mathbf{r}$  が右円旋光を表していることが分かります。そこで、 $\mathbf{l}$  を左円旋光単位ベクトル、 $\mathbf{r}$  を右円旋光単位ベクトルと呼びます。

よって、物質に入射する、 $x$  軸方向に直線偏光した電場 (4.2-23) 式は  $\mathbf{r}, \mathbf{l}$  を使って

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \exp\left\{i\omega \left(\frac{N}{c}z\right)\right\} \quad (4.2-26)$$

と書き直せます。

右円旋光が感じる屈折率は  $N_+$  であり、左円旋光が感じる屈折率は  $N_-$  であることから、 $z = 0$  と  $z = d$  (サンプル長) での位相差、つまりファラデー回転角  $\varphi$  は次のようになります。(右回りを正とします。)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(d) &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left( \exp\left\{i\omega \frac{N_+}{c}d\right\} \mathbf{r} + \exp\left\{i\omega \frac{N_-}{c}d\right\} \mathbf{l} \right) \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left\{ \exp\left\{i\frac{\omega}{c} \left(N + \frac{\Delta N}{2}\right)d\right\} \mathbf{r} + \exp\left\{i\frac{\omega}{c} \left(N - \frac{\Delta N}{2}\right)d\right\} \mathbf{l} \right\} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp\left\{i\omega \left(\frac{N}{c}d\right)\right\} \left( \exp\left\{i\frac{\omega}{c} \frac{\Delta N}{2}d\right\} \mathbf{r} + \exp\left\{-i\frac{\omega}{c} \frac{\Delta N}{2}d\right\} \mathbf{l} \right) \end{aligned} \quad (4.2-27)$$

(4.2-24) 式を使って、直交座標に戻すと

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(d) &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp\left\{i\omega \left(\frac{N}{c}d\right)\right\} \left( \exp\left\{i\frac{\omega}{c} \frac{\Delta N}{2}d\right\} (\mathbf{i} + i\mathbf{j}) + \exp\left\{-i\frac{\omega}{c} \frac{\Delta N}{2}d\right\} (\mathbf{i} - i\mathbf{j}) \right) \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp\left\{i\omega \left(\frac{N}{c}d\right)\right\} \left\{ \left( \exp\left\{i\frac{\omega}{c} \frac{\Delta N}{2}d\right\} + \exp\left\{-i\frac{\omega}{c} \frac{\Delta N}{2}d\right\} \right) \mathbf{i} + i \left( \exp\left\{i\frac{\omega}{c} \frac{\Delta N}{2}d\right\} - \exp\left\{-i\frac{\omega}{c} \frac{\Delta N}{2}d\right\} \right) \mathbf{j} \right\} \end{aligned} \quad (4.2-28)$$

サンプルであるフリントガラスの透明度が高く、光の減衰を無視すると  $\Delta\kappa = 0$  であり、 $\Delta N = \Delta n$  となります。

よって (4.2-28) 式は三角関数の複素表現を使って、次のようにまとまります。

$$\mathbf{E}(d) = E_0 \exp\left\{i\omega \left(\frac{N}{c}d\right)\right\} \left( \cos\left(\frac{\omega}{c} \frac{\Delta n}{2}d\right) \mathbf{i} - \sin\left(\frac{\omega}{c} \frac{\Delta n}{2}d\right) \mathbf{j} \right) \quad (4.2-29)$$

(4.2-23) と比べると、 $\mathbf{i}$  が次のような回転をしたこととなります。

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.2-30)$$

ここで

$$\theta = \frac{\omega}{c} \frac{\Delta n}{2} d$$

としています。

よって、ファラデー回転角  $\varphi$  は

$$\begin{aligned} \varphi &= -\theta \\ &= -\frac{\omega}{c} \frac{\Delta n}{2} d \\ &= \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon''_{xy}}{n} \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (4.2-31)$$

と表わされます。

(4.2-31) から、ファラデー回転角は比誘電率テンソル  $\varepsilon_r$  の非対角項  $\varepsilon''_{xy}$  に依存することが分かります。外部磁場  $\mathbf{B}$  の影響は、比誘電率対角項の磁化  $\mathbf{M}$  への依存性を通じて現れることとなります。

また、

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \propto \text{サンプル長} \\ \varphi \propto \frac{1}{n} \end{array} \right. \quad (4.2-32)$$

$$\quad (4.2-33)$$

も分かります。

(4.2-29) に時間  $t$  を入れ直し、入射面から任意の距離  $z$  での電場ベクトルは、次のようになります。

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \exp\left\{i\omega \left(\frac{N}{c}z - t\right)\right\} \left( \cos\left(\frac{\omega}{c} \frac{\Delta n}{2}z\right) \mathbf{i} - \sin\left(\frac{\omega}{c} \frac{\Delta n}{2}z\right) \mathbf{j} \right) \quad (4.2-34)$$

### 4.3 電子運動から見たファラデー回転角

第 4.2 節の結論では、ファラデー回転角は比誘電率の非対角項  $\varepsilon_{xy}$  の虚部を通じて、外部磁場の影響を受けていることが分かりました。

この節では外部磁場がある状態で光の電場が加わったときの電子の挙動を古典論的に考え、ファラデー回転角と外部磁場の関係を考察します。

振動する外部電場が加わったときの電子の運動方程式は、次のようになります。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e\mathbf{E} - k\mathbf{r} - \alpha \frac{d\mathbf{r}}{dt} - e \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (4.3-35)$$

ここで、

$m$  : 電子の質量

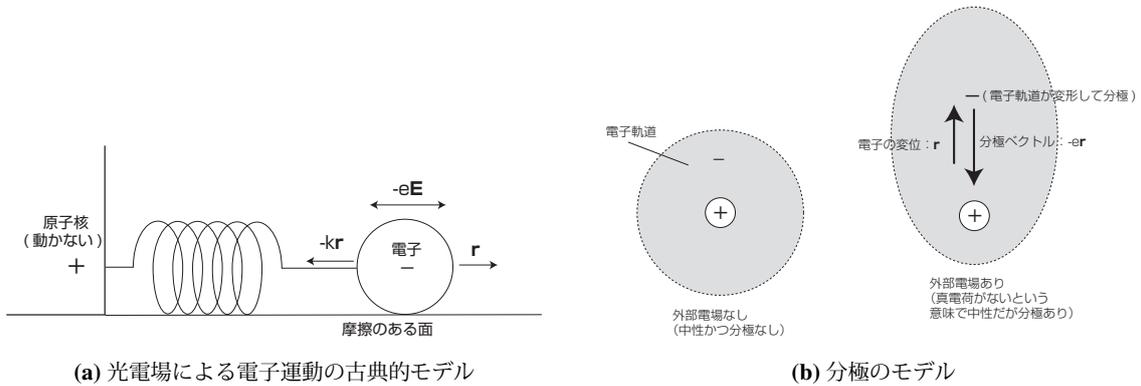
$\mathbf{r}$  : 電子の釣り合い位置からの変位

$e$  : 電気素量 ( $e > 0$ )

$k$  : 電子に働く復元力の係数

$\alpha$  : 電子の運動に対する周囲からの抵抗の係数\*6

です。ちょうど、電子がバネなどで繋がれており、摩擦のある状態で外力による強制振動を受けているモデル (図 3a) に、ローレンツ力を加えたものです。



(a) 光電場による電子運動の古典的モデル

(b) 分極のモデル

光電場は振動数  $\omega$  なので、強制振動からの類推で変位  $\mathbf{r}$  も同じ振動数  $\omega$  で振動すると考えられます。よって

$$\mathbf{r} \propto \exp\{-i\omega t\}$$

これから、(4.3-35) 式は次のように書けます。

$$-m\omega^2 \mathbf{r} = -e\mathbf{E} - k\mathbf{r} + i\alpha\omega \mathbf{r} + i e\omega \mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (4.3-36)$$

電子軌道が変形することで電気双極子が形成されます。これに電荷  $e$  と密度  $N$  (単位体積あたりの電気双極子数) を掛けたものが分極ベクトル  $\mathbf{P}$  の定義ですが、分極ベクトルの向きは負から正への向きです。今検討しているのは電子の運動であり、電子の変位ベクトルに  $-$  をつけたものが、正しい分極ベクトルの向きを表します。なので、

$$\mathbf{P} = -eN\mathbf{r} \quad (4.3-37)$$

\*6 分子に束縛されている電子ですが、電子が振動することで他の電子との衝突も起こります。そのため  $\alpha$  は衝突頻度 (1/平均自由時間) を意味しています。

すると (4.3-36) 式は両辺に  $-eN$  を掛けて分極ベクトルで書き換えると、次のようになります。

$$(m\omega^2 - k + i\alpha\omega)\mathbf{P} = -e^2N\mathbf{E} - ie\omega\mathbf{P} \times \mathbf{B} \quad (4.3-38)$$

磁場  $\mathbf{B}$  は  $z$  方向に印加されているので、

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad (4.3-39)$$

よって、

$$\mathbf{P} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} P_y B \\ -P_x B \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3-40)$$

(4.3-38) 式を  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$  の成分に分けてて書くと、次の連立式になります。

$$\begin{cases} (m\omega^2 - k + i\alpha\omega)P_x + ie\omega B P_y = -e^2 N E_x & (4.3-41) \\ (m\omega^2 - k + i\alpha\omega)P_y - ie\omega B P_x = -e^2 N E_y & (4.3-42) \\ (m\omega^2 - k + i\alpha\omega)P_z = -e^2 N E_z & (4.3-43) \end{cases}$$

行列で表示すれば、

$$-\frac{1}{e^2 N} \begin{pmatrix} m\omega^2 - k + i\alpha\omega & ie\omega B & 0 \\ -ie\omega B & m\omega^2 - k + i\alpha\omega & 0 \\ 0 & 0 & m\omega^2 - k + i\alpha\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (4.3-44)$$

これと電気感受率  $\chi$  を使った分極ベクトルの表現

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$$

を比べると、係数まで含めた  $3 \times 3$  行列は  $\chi$  の逆行列  $\chi^{-1}$  に  $1/\varepsilon_0$  を掛けたものであることが分かります。

よって、

$$\chi^{-1} = -\frac{\varepsilon_0}{e^2 N} \begin{pmatrix} m\omega^2 - k + i\alpha\omega & ie\omega B & 0 \\ -ie\omega B & m\omega^2 - k + i\alpha\omega & 0 \\ 0 & 0 & m\omega^2 - k + i\alpha\omega \end{pmatrix} \quad (4.3-45)$$

線形代数の基礎から  $\chi$  は (4.3-45) の余因子行列を求めることで、次のようになります。

$$\chi = \frac{1}{|\chi^{-1}|} \begin{pmatrix} (m\omega^2 - k + i\alpha\omega)^2 & -ie\omega B(m\omega^2 - k + i\alpha\omega) & 0 \\ ie\omega B(m\omega^2 - k + i\alpha\omega) & (m\omega^2 - k + i\alpha\omega)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (m\omega^2 - k + i\alpha\omega)^2 - (e\omega B)^2 \end{pmatrix} \quad (4.3-46)$$

ここで、

$$|\chi^{-1}| = -\frac{\varepsilon_0}{e^2 N} \{ (m\omega^2 - k + i\alpha\omega)^3 - (m\omega^2 - k + i\alpha\omega)(e\omega B)^2 \} \quad (4.3-47)$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{e^2 N} (m\omega^2 - k + i\alpha\omega) \{ (m\omega^2 - k + i\alpha\omega)^2 - (e\omega B)^2 \} \quad (4.3-48)$$

であるので、電気感受率  $\chi$  は、次のようになります。

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{xx} = \chi_{yy} = -\frac{e^2 N}{\varepsilon_0} \frac{m\omega^2 - k + i\alpha\omega}{(m\omega^2 - k + i\alpha\omega)^2 - (e\omega B)^2} \end{array} \right. \quad (4.3-49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{xy} = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0} \frac{ie\omega B}{(m\omega^2 - k + i\alpha\omega)^2 - (e\omega B)^2} \end{array} \right. \quad (4.3-50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{yx} = -\chi_{xy} \end{array} \right. \quad (4.3-51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{zz} = -\frac{e^2 N}{\varepsilon_0} \frac{1}{m\omega^2 - k + i\alpha\omega} \end{array} \right. \quad (4.3-52)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{xz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = \chi_{zy} = 0 \end{array} \right. \quad (4.3-53)$$

ここで次のようにパラメータを定義して式の見通しを良くします。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.3-54)$$

$\omega_0$  は共振振動数と呼ばれるものです。<sup>\*7</sup>

よって、

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{xx} = \chi_{yy} = -\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega^2 - \omega_0^2 + i\frac{\alpha}{m}\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2 + i\frac{\alpha}{m}\omega)^2 - (\frac{eB}{m}\omega)^2} \end{array} \right. \quad (4.3-55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{xy} = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{ie\omega B}{(\omega^2 - \omega_0^2 + i\frac{\alpha}{m}\omega)^2 - (\frac{eB}{m}\omega)^2} \end{array} \right. \quad (4.3-56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{yx} = -\chi_{xy} \end{array} \right. \quad (4.3-57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{zz} = -\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\frac{\alpha}{m}\omega} \end{array} \right. \quad (4.3-58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{xz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = \chi_{zy} = 0 \end{array} \right. \quad (4.3-59)$$

この電気感受率で比誘電率を表わし、ファラデー回転角の (4.2-31) 式から外部磁場依存性を調べます。

<sup>\*7</sup> バネに繋がれたおもりの単振動を考えてみましょう

電気感受率  $\chi$  と比誘電率  $\varepsilon_r$  の関係は次のようにして分かります。

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.3-60)$$

$$= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (4.3-61)$$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (4.3-62)$$

$$\therefore \varepsilon_r = 1 + \chi \quad (4.3-63)$$

ここで1は  $3 \times 3$  の単位行列です。

よって、比誘電率  $\varepsilon_r$  は、次のようになります。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega^2 - \omega_0^2 + i \frac{\alpha}{m} \omega}{(\omega^2 - \omega_0^2 + i \frac{\alpha}{m} \omega)^2 - (\frac{eB}{m} \omega)^2} \end{array} \right. \quad (4.3-64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xy} = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{i e \omega B}{(\omega^2 - \omega_0^2 + i \frac{\alpha}{m} \omega)^2 - (\frac{eB}{m} \omega)^2} \end{array} \right. \quad (4.3-65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{yx} = -\varepsilon_{xy} \end{array} \right. \quad (4.3-66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i \frac{\alpha}{m} \omega} \end{array} \right. \quad (4.3-67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0 \end{array} \right. \quad (4.3-68)$$

これからファラデー回転角  $\varphi$  は次のように表わされます。

$$\varphi = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon''_{xy}}{n} \frac{d}{2} \quad (4.3-69)$$

$$= \frac{\omega}{cn} \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{d}{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{i e \omega B}{(\omega^2 - \omega_0^2 + i \frac{\alpha}{m} \omega)^2 - (\frac{eB}{m} \omega)^2} \right\} \quad (4.3-70)$$

今  $\alpha/m$  が小さいとしてこの項を落とすと、

$$\varphi = \frac{\omega}{cn} \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{d}{2} \frac{e \omega B}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - (\frac{eB}{m} \omega)^2} \quad (4.3-71)$$

となります。

光波を扱っているので振動数が非常に大きく、(4.3-71) 式の分母にある磁束密度  $B$  は、ほとんど影響を与えません。そのため(4.3-71) 式よりファラデー回転角  $\varphi$  が磁束密度  $B$  に比例することが分かります。

また、ベルデ定数  $V$  を用いたファラデー回転角の式

$$\varphi = VBd$$

と (4.3-71) 式を比較すると、ベルデ定数  $V$  として、次の式を得ます。

$$V = \frac{\omega}{cn} \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{2} \frac{e\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \left(\frac{eB}{m}\omega\right)^2} \quad (4.3-72)$$

$$\approx \frac{\omega}{cn} \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{2} \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (4.3-73)$$

ここで

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 \gg \left(\frac{eB}{m}\omega\right)^2$$

として落としています。

また (4.3-71) 式でラーモア周波数 (サイクロトロン振動数)  $eB/m \equiv \omega_c$  をくくり出すと、次のようにファラデー回転角がラーモア周波数に比例することが見て取れます。

$$\varphi = \frac{\omega}{cn} \frac{e^2 N d}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{2} \frac{e\omega B}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \left(\frac{eB}{m}\omega\right)^2} \quad (4.3-74)$$

$$\approx \frac{\omega}{cn} \frac{e^2 N d}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{2} \frac{e\omega B}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (4.3-75)$$

$$= \frac{\omega}{cn} \frac{e^2 N d}{\varepsilon_0} \frac{1}{2} \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \omega_c \quad (4.3-76)$$

## 参考文献

- [1] ザイマン, J.M. 『固体物性論の基礎』第2版 (丸善, 1977)
- [2] 佐藤勝昭 『光と磁気』改訂版 (朝倉書店, 2001)