

UE5010400 油滴の終端速度と粘性抵抗の補正

3B Scientific

27 August 2021

1 目的

UE5010400 ミリカンの実験で油滴の終端速度を見積もり、油滴が動きだせばすぐに終端速度に達することを確かめる。また、ストークスの粘性抵抗式への補正をどのように考えたのか理解すること。

2 空気中の油滴のレイノルズ数

実験の解析で用いたように流体の粘性抵抗が大きく慣性抵抗を無視できる場合は、流体中の物体の速度 (の大きさ) の一次に比例する抗力が運動を妨げるように生じます。物体を球とし η, r, v をそれぞれ流体の粘性率、物体の半径、速度の大きさとすれば、抗力 F_r はストークスの粘性抵抗式で $F_r = 6\pi\eta r v$ と表せます。UE5010400 ミリカンの実験で測定した油滴が球形としたときの半径 r は測定データから求めているので、レイノルズ数 Re を計算し粘性抵抗が主 ($Re < 1$) となっているか確認します。

測定した 10 個の油滴で最大の半径は $r_{max} = 1.44 \mu\text{m}$ でした。また油滴の上昇下降通じて最大の速さは $v_{max} = 0.11 \text{ mm s}^{-1}$ でした。これらの値と

- 空気の密度 ρ_a : 1.184 kg/m^3 (25 °C, 1013 hPa)
- 空気の粘性率 η : $1.88 \times 10^{-5} \text{ kg/(ms)}$

をレイノルズ数の式に入れると

$$Re = \frac{2\rho_a r_{\max} v_{\max}}{\eta}$$
$$\approx 2 \times 10^{-5} \ll 1$$

と粘性抵抗が支配的であることが分かります。

3 油滴の移動速度の緩和時間

油滴に力が加わり運動が変化しても、すぐに終端速度となることを運動方程式から確認します。油滴が上下に鉛直方向にのみ動くとするば働く力の大きさは次の通りです。

- 油滴に働く重力: $F_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o g$
- 油滴に働く浮力: $F_a = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g$
- 電場による力: $F_e = q\frac{V}{d}$
- ストークスの粘性抵抗: $F_r = 6\pi\eta r v$

一次元の鉛直方向で上向きを正に取り上昇中であれば、運動方程式は

$$m\dot{v} = F_e + F_a - F_g - F_r$$
$$= q\frac{V}{d} + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o g - 6\pi\eta r v \quad (1)$$

であり¹⁾、微分方程式を解けば

$$v = A \left\{ 1 - a \exp\left(-\frac{t}{B}\right) \right\}$$

となります。ここで

$$A = \frac{qV}{6\pi\eta r d} - \frac{2r^2 g}{9\eta} (\rho_o - \rho_a)$$
$$B = \frac{2r^2 \rho_o}{9\eta}$$

1) 油滴に働く浮力と重力は常に反対向きであり、2つの合力は密度の差に比例します。密度が700倍以上異なるので浮力を無視することもできます。

です。 a は初速度で決まる定数で $v(t=0) = 0$ ならば $a = 1$ です。 B は緩和時間と呼ばれ時間変化する量が変化に要する時間の目安として良く使われます²⁾。 B の具体的な数値として

- 油滴の半径 r (典型値) : $1 \mu\text{m}$
- 油滴用オイルの密度 ρ_o : $871 \text{ kg}/(\text{m}^3)$

を入れると $B \approx 10 \mu\text{s}$ であり、測定時間 ($\sim 10 \text{ s}$) と比べれば油滴はすぐに終端速度に達すると扱えます。

同様に下降中を考えれば次の通りです³⁾。

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= F_a + F_r - F_g \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g - 6\pi\eta r v - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o g \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 式は (1) 式で $V = 0$ としただけなので緩和時間は同一で、下降時でも油滴はただちに終端速度になります。また自由落下での終端速度は

$$v = -\frac{2r^2 g}{9\eta}(\rho_o - \rho_a) \quad (3)$$

となります。

4 粘性抵抗の補正

ストークスの粘性抵抗式に対する補正の必要性と補正項の形は、ミリカンにより次のような筋書で導入されています。

ミリカン含めそれまでの油滴実験による自由落下から求めた電気素量とその時の油滴の落下速度は、速度が極端に小さいと電気素量が非常に大きくなることをミリカンは見出していました。このときの関係は直線的ではなく変化率がどんどん大きくなります。しかし、ある程度以上の速度になると電気素量と落下速度はやはり依存性を持ちますが、依存性は直線的で比例係数は小さいということにも気が付いていました。

2) ここでは $1 - a/e$ だけ変化する時間です

3) v が負なので $-v > 0$ となります

求める電気素量が速度の大きさに依存してしまうのは、ストークスの粘性抵抗式での「流体は均質とみなせる」という仮定が綻びてくるためと考えていました。平均自由行程が大きい空気のような気体では気体中の粒子が小さくなると、その粒子にとっては空気は均質とはなっていないと考えていました。また粘性抵抗式への補正は平均自由行程と油滴 (あるいは球体) の半径の比を引数とする関数となるだろうという推論をしています。当然、半径 r が大きくなるほど補正効果は小さくなり、平均自由行程 ℓ より十分大きくなれば補正の効果は消えるという関数になります。

この考えに従えば f を補正を表わす関数としたとき、自由落下の速度 (3) 式から補正を受けた落下速度は

$$v = \frac{2r^2g}{9\eta}(\rho_o - \rho_a) \left(1 + f\left(\frac{\ell}{r}\right)\right) \quad (4)$$

と表わせます。

ミリカンは補正関数 $f(\ell/r)$ を ℓ/r で展開したときの一次の項だけを取り入れています。これから (4) 式で A を実験から決まる定数、 r_c を油滴の真の半径とすれば補正された落下速度 v は

$$v = \frac{2r^2g}{9\eta}(\rho_o - \rho_a) \left(1 + A\frac{\ell}{r_c}\right) \quad (5)$$

となります。

また気体の平均自由行程 ℓ は圧力 p に反比例するので (5) 式は次のようにも書けます。

$$v = \frac{2r^2g}{9\eta}(\rho_o - \rho_a) \left(1 + \frac{A'}{pr_c}\right) \quad (6)$$

(6) 式の A' が実験解説書にある定数 $B = 82 \mu\text{m hPa}$ となります。

参考文献

- [1] Robert Andrews Millikan, “*The Electron*” chapter V (The University of Chicago Press, 1917) <https://archive.org/details/ost-chemistry-millikan-theelectron>
- [2] 山本 裕樹, Millikan の油滴実験による素電荷測定の精度について, 慶應義塾大学日吉紀要 自然科学 (44), 81-97, 2008, (慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会) https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20080930-0081