

セット番号：UE5010400

## ミリカンの実験



## 実験の手順

- 機器のセットアップを行い、油滴用霧吹きのパルプを1回強く押す
- チャンバーの平板電極への電圧印加を切り切りし、油滴の上昇/下降時間を測定する
- 測定値から電気素量を求め、国際単位系(SI)の定義値と比較する

## 目的

ミリカンの油滴実験を通じて、電荷に最小単位(電気素量)があることを検証し、電気素量の値を測定から求めること。

## 必要機器

| 品番          | 品名        | 数量 |
|-------------|-----------|----|
| U207001-115 | ミリカンの実験装置 | 1  |

## 基本原理

電気素量を精度良く測定したミリカンの実験を再現します。微小な油滴を霧吹きで作成し、噴霧帯電により帯電した油滴(半径 $\sim 1\mu\text{m}$ )に電場を印加したときの移動速度と無印加での移動速度から帯電した油滴の電荷量を求めるものです。油滴の径が小さいためミリカンが行ったように空気の平均自由行程と油滴半径の比をパラメータとしてストークスの粘性抵抗式に補正を行います。

油滴はランダムに正にも負にも帯電します。そのため設定した印加電圧極性で電圧を加えたときに上昇する油滴を測定対象に取ります。実験手順のとおり自由落下での時間 $t_2$ と電場による力を受けて上昇する時間 $t_1$ の2つを測定します。電場による力を受けて上昇する速さを $v_1$ 、自由落下するときの速さを $v_2$ とすればそれぞれ図1a、1bのように力を受け、油滴が動きだすとすぐに終端速度に達して力が釣り合った状態になっています。

## 基礎実験

- 仕様は予告なく変更されることがあります。
- 品番・製品名をクリックすると製品仕様ページ(外部サイト)が開きます。

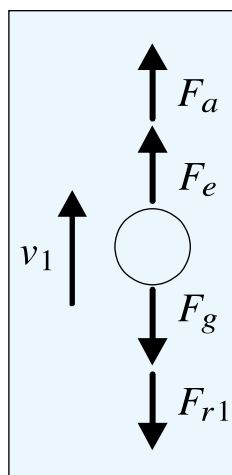


図1a：油滴上昇時に働く力

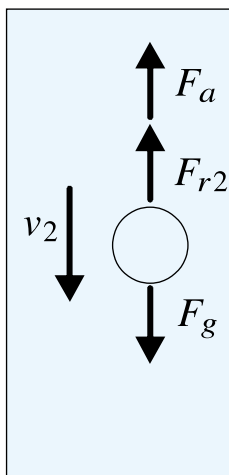


図1b：油滴下降時に働く力

図1：油滴に働く力

図1に図示している力を具体的に書けば次の通りです。

$$F_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o g$$

$$F_a = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g$$

$$F_r = 6\pi\eta r v$$

$$F_e = q \frac{V}{d}$$

ここで  $\rho_o$ : 油滴の密度,  $\rho_a$ : 空気密度,  $\eta$ : 空気の粘性率,  $V$ : 平行電極間の電圧,  $d$ : 平行電極間隔,  $r$ : 油滴を球形としたときの半径,  $v$ : 油滴の速度(の大きさ)です。

図1a, 1bとも力が釣り合っているので次の二式が成り立ちます。

$$(1) \quad \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g + q \frac{V}{d} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o g + 6\pi\eta r v_1$$

$$(2) \quad \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g + 6\pi\eta r v_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o g$$

(2)式から油滴の半径 $r$ が求まります。

$$(3) \quad r = \sqrt{\frac{9\eta v_2}{2(\rho_o - \rho_a)g}}$$

この $r$ と(1)式から油滴の電荷 $q$ は次のように表せます。

$$(4) \quad q = \frac{6\pi\eta d}{V} (v_1 + v_2) r$$

油滴の半径が約  $1\mu\text{m}$  程度(表3のデータを参照)であり標準状態の空気平均自由行程がおおよそ  $0.7\mu\text{m}$  なので、ミリカンに倣ってストークスの粘性抵抗式に補正を行います。これは油滴の大きさがこのオーダーになると空気を一様な媒質とは見做せず、油滴と気体分子が「スリップ」して衝突ではなく滑るという効果が衝突の一部を置き換えることを意味します。

本来こうした補正を入れるには、別の方法で油滴の終端速度がストークスの粘性抵抗式から外れることを確認する必用があります。しかし、ここではその必要性の検討をミリカンが既に行っているとして受け入れて、無条件でミリカンのストークスの粘性抵抗式への補正項を流用します。

元々のアイディアから、補正は空気の平均自由行程  $\ell$  と油滴の半径  $r$  の比に依存し、 $r$  が  $\ell$  に対して十分大きければ補正の効果は消えるとして次のようにします。

$$(5) \quad F_r = \frac{6\pi\eta r v}{C}$$

$$(6) \quad C = 1 + A \frac{\ell}{r}$$

ここで  $\ell$ : 空気の平均自由行程,  $A$ : 実験的に決定される定数です。

(5)(6)式は粘性率 $\eta$ を $C$ で割り補正していると見做せます。 $C$ には油滴半径 $r$ が入っていて、この $r$ は補正後の $r$ なので(5)式の $\eta$ を $\eta/C$ で置き換え $r$ について解きなおします。補正した油滴半径を $r_c$ と書けば

$$r_c^2 = \frac{9\eta v_2}{2g(\rho_o - \rho_a)g} \frac{1}{1 + A \frac{\ell}{r_c}}$$

であり、これは

$$(7) \quad r_c(r_c + A\ell) = \frac{9\eta v_2}{2g(\rho_o - \rho_a)g} = r^2$$

となります。(7)式右辺の $r$ は補正前の(5)式の $r$ です。二次方程式を解くだけなので $r_c > 0$ より

$$(8) \quad r_c = \sqrt{r^2 + \frac{A\ell^2}{4}} - \frac{A\ell}{2}$$

となります。(8)式は次のようにも書けます。

$$(9) \quad r^2 = r_c^2 \left(1 + A \frac{\ell}{r_c}\right)$$

補正した電荷 $q_c$ は(6)式の $\eta$ を $\eta/C$ に、 $r$ を $r_c$ に置き換えることで次のようになります。

$$(10) \quad q_c = \frac{6\pi\eta d}{V} (v_1 + v_2) r_c \left(1 + A \frac{\ell}{r_c}\right)^{-3/2}$$

ここまではミリカンの議論に合わせて係数 $A$ と平均自由行程 $\ell$ を分離していましたが、メーカーでは $A$ の値を平均自由行程 $\ell$ との積で示しており次の式になるとしています。

$$(11) \quad A\ell = \frac{B}{p}$$

ここで $B$ は定数で $B=82 \mu\text{m hPa}$ 、 $p$ は測定時の大気圧です。

### 実験の手順:

- ・ 機器のセットアップを行い、内部のクリーンアップと接眼レンズの焦点をあわせる
- ・ 接眼レンズから見えるマイクロメーターのどの目盛り間で油滴の移動速度を求めるか決める(目盛り間隔で2mm程度の距離)
- ・ 油滴用霧吹きバルブを強く1回押す(複数回押すとチャンバー内の油滴が多くなりすぎます)
- ・ 接眼レンズでチャンバー内を観察し、適当な大きさの油滴を見つける
- ・ チャンバーの平板電極に電圧を印加し、油滴が先に決めた目盛り間の上側より上に移動するように調節する
- ・ 電圧を切り油滴が落下して上側目盛りに到達した瞬間にタイマーのスイッチ(t)をONにする( $t_2$ 測定の開始)
- ・ 油滴が下側の目盛りに到達した瞬間に印加電圧のスイッチ(U)をONにする( $t_2$ 測定の終了と $t_1$ 測定の開始)
- ・ 油滴が上昇し上側の目盛りに到達したときにタイマーのスイッチ(t)をOFFにする( $t_1$ 測定の終了)
- ・ 油滴を選びなおし、別の油滴で同様に $t_1, t_2$ を測定する
- ・ 測定値から補正を行い電気素量を求め、国際単位系(SI)の $e$ の定義値と比較する

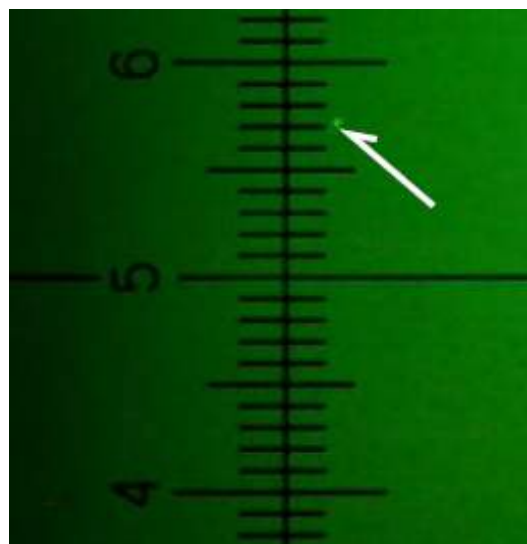
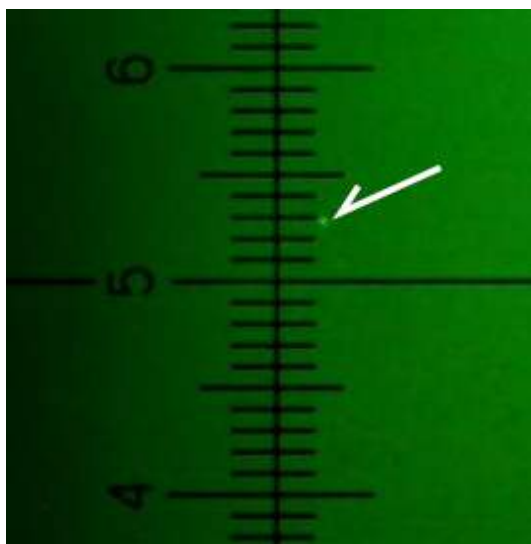


図2：接眼レンズを通して見た油滴

## 測定

10個の油滴でそれぞれ印加電圧を変えて $t_1, t_2$ を測定しました(表1)。表1のpolarityは平行電極の上側電極の極性を示しています。そのためpolarity+で実験手順通り上へ移動する油滴は負に帯電しており、polarity-の場合は油滴は正に帯電しています。

| i  | $t_{1i}$ [s] | $t_{2i}$ [s] | $U_i$ [V] | polarity |
|----|--------------|--------------|-----------|----------|
| 1  | 12.426       | 13.780       | 107.0     | +        |
| 2  | 14.414       | 17.433       | 109.4     | +        |
| 3  | 13.604       | 9.053        | 292.6     | +        |
| 4  | 13.641       | 23.631       | 190.9     | -        |
| 5  | 10.502       | 14.858       | 246.1     | -        |
| 6  | 14.203       | 21.674       | 110.9     | -        |
| 7  | 9.814        | 10.228       | 279.4     | -        |
| 8  | 13.813       | 16.824       | 120.4     | -        |
| 9  | 9.936        | 16.380       | 112.1     | -        |
| 10 | 13.184       | 12.214       | 124.5     | -        |

表1：測定結果

| i  | $v_1$ [ $\mu\text{m s}^{-1}$ ] | $v_2$ [ $\mu\text{m s}^{-1}$ ] | $r$ [ $\mu\text{m}$ ] | $q$ [ $10^{-19}\text{C}$ ] |
|----|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| 1  | 80.5                           | 72.6                           | 1.20                  | -18.2                      |
| 2  | 69.4                           | 57.4                           | 1.07                  | -13.1                      |
| 3  | 73.5                           | 110                            | 1.48                  | -9.86                      |
| 4  | 73.3                           | 42.3                           | 0.915                 | 5.88                       |
| 5  | 95.2                           | 67.3                           | 1.15                  | 8.08                       |
| 6  | 70.4                           | 46.1                           | 0.955                 | 10.7                       |
| 7  | 102                            | 97.8                           | 1.39                  | 10.5                       |
| 8  | 72.4                           | 59.4                           | 1.08                  | 12.6                       |
| 9  | 101                            | 61.1                           | 1.10                  | 16.8                       |
| 10 | 75.8                           | 81.9                           | 1.27                  | 17.1                       |

表2：補正前の油滴半径と帯電量

測定時の条件や使用したパラメータは以下の通りです。

- ・ 平行電極間隔  $d$ : 3 mm
- ・ 油滴の移動距離  $s$ : 1 mm
- ・ 空気の粘性率  $\eta$ :  $1.88 \times 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$
- ・ 空気の密度(25℃, 1013 hPa)  $\rho_a$ :  $1.184 \text{ kg/m}^3$
- ・ 油滴用オイル密度(25℃)  $\rho_o$ :  $871 \text{ kg/m}^3$
- ・ 重力加速度  $g$ :  $9.81 \text{ m/s}^2$
- ・ 大気圧  $p$ : 1014 hPa
- ・ 補正係数  $b$ :  $82 \mu\text{m hPa}$
- ・ 補正係数  $A=b/p$ :  $8.09 \times 10^{-8} \text{ m}$

これらのパラメータと(3)(4)式から補正前の値として表2のように計算しました。

表2で求めた油滴半径 $r$ と帯電量 $q$ に(9)(10)式を使い油滴の半径が小さいという補正を行った電気素量の推定をしました。同時に(10)式から誤差伝播の式を使い帯電量の不確かさ $\Delta q$ 、推定電気素量の不確かさ $\Delta e$ も求めた結果が表3です。なお表3第4列の $q_i/e_{\text{ref}}$ は帯電量が電気素量の何倍程度か見積もるために $q_i$ を $1.602 \times 10^{-19}$ で割った値です。

ここで測定時の誤差(不確かさ)は次の通りです。

- ・ 平行電極間距離の誤差 $\Delta d$ : 0.1 mm
- ・ 接眼レンズ内スケールの誤差 $\Delta s$ :  $50 \mu\text{m}$
- ・ 機器内蔵タイマーの誤差(クォーツ制御) $\Delta t$ :  $1 \mu\text{s}$
- ・ 機器内蔵電圧計の誤差(1000Vの0.5%±5ディジット) $\Delta V$ : 5.5 V

| i  | $r_i$ [ $\mu\text{m}$ ] | $q_i$ [ $10^{-19}\text{C}$ ] | $\Delta q$ [ $10^{-19}\text{C}$ ] | $q_i/e_{\text{ref}}$ | $n_i$ | $e_i$ [ $10^{-19}\text{C}$ ] | $\Delta e_i$ [ $10^{-19}\text{C}$ ] |
|----|-------------------------|------------------------------|-----------------------------------|----------------------|-------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1  | 1.16                    | -20.12                       | 1.23                              | 12.6                 | 13    | 1.55                         | 0.15                                |
| 2  | 1.03                    | -14.67                       | 0.89                              | 9.2                  | 9     | 1.63                         | 0.21                                |
| 3  | 1.44                    | -10.71                       | 0.41                              | 6.7                  | 7     | 1.53                         | 0.23                                |
| 4  | 0.88                    | 6.71                         | 0.30                              | 4.2                  | 4     | 1.68                         | 0.43                                |
| 5  | 1.11                    | 8.98                         | 0.36                              | 5.6                  | 6     | 1.50                         | 0.26                                |
| 6  | 0.92                    | 12.09                        | 0.72                              | 7.6                  | 8     | 1.51                         | 0.21                                |
| 7  | 1.35                    | 11.51                        | 0.45                              | 7.2                  | 7     | 1.64                         | 0.24                                |
| 8  | 1.04                    | 14.09                        | 0.80                              | 8.8                  | 9     | 1.57                         | 0.20                                |
| 9  | 1.06                    | 18.78                        | 1.11                              | 11.7                 | 12    | 1.57                         | 0.16                                |
| 10 | 1.23                    | 18.82                        | 1.04                              | 11.7                 | 12    | 1.57                         | 0.16                                |

表3：補正後の油滴半径 $r$ と帯電量 $q$ および電気素量の推定

この結果を使い測定から得た電気素量の平均を求めます。この場合データのばらつきを加味する加重平均で出すのが妥当です。重み $w_i=(1/\Delta e_i)^2$ として計算します。

これから

$$\begin{aligned}
 (12) \quad e \pm \Delta e &= \frac{\sum w_i e_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} \\
 &= (1.56 \pm 0.06) \times 10^{-19} [\text{C}]
 \end{aligned}$$

とSI定義値( $e = 1.602176634 \times 10^{-19} [\text{C}]$ )と良く一致し、誤差範囲の中にSI定義値が入っています。